Questions de cours

Exercice 1 (Loi uniforme)
On lance un dé à 12 faces bien équilibré. On note A l'évènement "obtenir un multiple de 3" et B l'évènement "obtenir un multiple de 4". Déterminer $P(A)$ et $P(B)$.

Exercice 2 (Cardinal d'une union disjointe)
On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un pique ou un carreau ?

Exercice 3 (Cardinal d'une union disjointe(2))
On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Quel est le nombre de possibilités d'obtenir un 7 ou une figure (roi, dame, valet) ?

Exercice 4 (Cardinal d'une union quelconque)
On tire une carte dans un jeu de 32. Quel est le nombre de manière d'obtenir une figure ou un coeur ?

Exercice 5 (Cardinal en utilisant une partition)
Dans une classe de 33 élèves, 7 élèves ayant travaillé plus de 10 h dans la semaine ont obtenu une note supérieur à 10. 3 élèves ayant travaillé entre 6 et 10 h dans la semaine ont obtenu une note supérieur à 10. Enfin, aucun des élèves ayant travaillé moins de 6h dans la semaine n'a obtenu une note supérieur à 10.

Exercice 6 (Cardinal du complémentaire)
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Quel est le nombre de manière de ne pas tirer un Roi noir ?

Exercice 7 (p-listes)
Lorsqu'on lance un dé à 6 faces, l'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]$. Donner des 2 listes de Ω et des 8 listes de Ω.

Exercice 8 (Cardinal du produit cartésien)
Un restaurant propose 3 choix d'entrées, 4 choix de plats principaux et 5 choix de desserts. Combien peut-on confectionner de menus distincts ?

Exercice 9 (Avec ordre et Avec remise)
Quel est le nombre de codes possibles pour une carte bleue ?

Exercice 10 (Permutations)
Combien y a-t-il de résultats possibles dans une course rassemblant 12 chevaux ?

Exercice 11 (Arrangements)
Quel est le nombre de paris possibles au tiercé pour une course de 12 chevaux ?

Exercice 12 (Combinaisons)
On distribue 5 cartes à un joueur dans un jeu de 52 cartes. Quel est le nombre de mains possibles ?

Exercice 13 (Calculs)
(a) $A = \binom{3}{0}$
(b) $B = \binom{21}{1}$
(c) $C = \binom{25}{3}$

Exercice 14 (Calculs)
(a) $A = (a+b)^3$
(b) $B = (2x-3)^3$

Calculer des probabilités à l'aide du dénombrement

Exercice 15
On lance deux fois de suite un dé équilibré.
(a) Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 8 ?
(b) Il y a 11 sommes possibles (tous les entiers entre 2 et 12). Pourquoi la probabilité calculée à la première question n'est-elle pas tout simplement égale à $\dfrac{1}{11}$?

Exercice 16 (*)
On tire 3 cartes une à une et au hasard avec remise à chaque fois de la carte tirée, dans un jeu de 32 cartes (8 hauteurs et 4 couleurs).
(a) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 valets ?
(b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois une carte de même hauteur ?
(c) Quelle est la probabilité qu'au moins une de ces cartes soient un valet ?

Exercice 17 (*)
On tire 3 cartes une à une et au hasard **sans** remise à chaque fois de la carte tirée, dans un jeu de 32 cartes (8 hauteurs et 4 couleurs).

(a) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 valets ?
(b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois une carte de même hauteur ?
(c) Quelle est la probabilité qu'au moins une de ces cartes soient un valet ?

Exercice 18 (**)
On s'appliquera à justifier les réponses. Le résultat numérique final n'est pas exigé (laisser sous formes de formule). Une main de poker est constitué de 5 cartes tirées d'un jeu de 52 cartes (4 couleurs et 13 cartes par couleurs).

(a) Nombre de tirages possibles ?
(b) Nombre de tirages donnant exactement 5 cartes de même couleur ?
(c) Nombre de tirages donnant les 4 As ? donnant un carré (4 cartes identiques)
(d) Nombre de tirages donnant exactement 3 cartes de même couleur ?

Exercice 19 (***)
On cherche à démontrer le théorème suivant : "Si E est un ensemble à n éléments alors $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$."
$\forall$p $\in \{0, ..., n\}$, on pose E_p l'ensemble des parties de E à p éléments.

(a) Que peut-on dire de la famille des $(E_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$ par rapport à $\mathcal{P}(E)$?
(b) Déterminer le cardinal de $(E_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$
(c) En déduire que $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Calculer avec des factorielles et des coefficients binomiaux

Exercice 20 (Calculs)
Calculer les coefficients binomiaux suivants.

(a) $A = \binom{2}{2}$ (b) $B = \binom{17}{14}$ (c) $C = \binom{10}{2} + \binom{10}{3}$

Comparer le dernier résultat obtenu avec $\binom{11}{3}$.

Exercice 21 (Développer les expressions suivantes.)

(a) $A = (a+2)^3$
(b) $B = (1+\sqrt{2})^4 + (1-\sqrt{2})^4$

Exercice 22 (**)
On désigne par n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.

(a) Montrer que $\forall i \in [\![k, n]\!]$, $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$
(b) En déduire que, pour tout réel x, on a $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} x^{n-i} = \binom{n}{k}(1+x)^{n-k}$.

Exercice 23 (**)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Question préliminaire : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les quantités $(k+1)k!$ et $(k+2)(k+1)k!$
(b) On considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$.
 (i) En utilisant la décomposition $k = k+1-1$, justifier que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$.
 (ii) Déduire du résultat précédent que $S_n = (n+1)! - 1$.
(c) On considère la somme $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+1) \times k!$.
 (i) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $k^2 + 1 = (k+2)(k+1) - 2(k+1) + 1 - k$.
 (ii) En utilisant la décomposition précédente et la linéarité de la somme, montrer que
$$T_n = \sum_{k=1}^{n}(k+2)! - 2\sum_{k=1}^{n}(k+1)! + \sum_{k=1}^{n} k! - S_n.$$
 (iii) En remarquant une propriété télescopique sur les 3 premières sommes, montrer que
$$T_n = (n+2)! - (n+1)! - 1 - S_n.$$
 (iv) Simplifier le résultat précédent pour obtenir $T_n = (n+1)!n$.