Questions de cours

Exercice 1 (Par récurrence)
Montrer par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2 (En ajoutant ou retranchant des termes)
Calculer les sommes suivantes

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3$

Exercice 3 (En factorisant)
Calculer les sommes suivantes

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4k^2$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{k+3}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{4^k \times 8^k}{2^{2k+1}}$

Exercice 4 (En développant)
Calculer les sommes suivantes

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k+1$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4k^3+3k^2$

Exercice 5 (Changement de variables)
Calculer les sommes suivantes

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^3$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ (c) $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x^k$

Exercice 6 (Sommes télescopiques)
Calculer les sommes suivantes

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} (k+1)^2-k^2$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

Indication pour la dernière : On montrera que $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

Exercice 7 (En utilisant le binôme de Newton)
Calculer les sommes suivantes

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 4^{n-k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k 4^{n-k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$

Exercice 8

(a) Montrer que $\forall k \geq 3, \quad \ln(k) \geq 1$.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \ln(k) \geq n-2$.

Exercice 9 (Probabilité)
On considère $A_1, \dots, A_n$, un système complet d'évènement tels que

$$\forall i \in [\![1;n]\!], P(A_i) = \frac{a}{3^{i+1}}.$$

Déterminez la valeur de a.

Exercice 10 (Formule des probabilités totales)
On considère 20 urnes numérotées de 1 à 20. Dans la k^{eme} urne, il y a k boules vertes et $20-k$ boules rouges. On lance un dé à 20 faces et on tire une boule dans l'urne portant le numéro de la face obtenue par le dé. On note les évènements A_k : "La face obtenu par le dé porte le numéro k" et V : "La boule tirée est verte". Calculer $P(V)$.

Exercice 11 (Indépendance)
Votre voisine a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événement suivants :
— $A =$ "les deux enfants sont de sexes différents"
— $B =$ "l'ainé est une fille"
— $C =$ "le cadet est un garçon".

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 12 (Puissance de matrice)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $A = I_3 + B$ où B est une matrice à déterminer.
(b) Montrer que pour $k \geq 2$, $B^k = 0_3$.
(c) Pour $n \geq 2$, calculer A^n à l'aide du binôme de Newton.

Manipuler une inégalité mettant en jeu une somme.

Exercice 13
(a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq x$
(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^k \geq \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 14 (*)
Soit $n \geq 2$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^n \geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Utiliser la formule des probabilités totales

Exercice 15
On choisit au hasard une des 4 urnes ci-dessous et on en tire une boule au hasard.
— L'urne 1 contient 3 boules rouges, 2 blanches et 3 noires.
— L'urne 2 contient 4 boules rouges, 3 blanches et 1 noire.
— L'urne 3 contient 2 boules rouges, 1 blanche et 1 noire.
— L'urne 4 contient 1 boule rouge, 6 blanches et 1 noires.

Déterminer la probabilité que cette boule soit blanche.

Exercice 16 (*)
Soit n un entier plus grand que 1. Dans un sac, on place n jetons numérotés de 1 à n. On a également n urne telle que l'urne k contienne k^2 boules blanches et $n^2 - k^2$ boules noires. On considère l'expérience suivante :
(a) On tire un jeton aléatoirement du sac.
(b) On pioche dans l'urne correspondant au numéro du jeton, une boule. On regarde la couleur de cette boule.

Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

Exercice 17 (**)
On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B, C d'un triangle suivant le procédé suivant :

— Si la particule se trouve en B, elle y reste.
— Si la particule se trouve en A, elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.
— Si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois et a 7 chances sur 12 d'aller en B. Enfin, il y a une chance sur 12 d'aller en A.

A la première seconde elle se pose au hasard sur l'un des trois sommets.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement : « à la n-ième seconde, la particule se trouve en A (respectivement B et C) »et on note a_n, b_n, c_n les probabilités de A_n, B_n, C_n.

(a) Donner a_1, b_1, c_1.
(b) Donner pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = (1/2)^n - (1/6)^n$. En déduire a_n et b_n en fonction de n.

Déterminer l'indépendance d'évènements.

Exercice 18
On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer n tirages (avec $n \geq 2$) dans une urne contenant 3 boules noires et 5 boules rouges. Les tirages se feront avec remise. Calculer la probabilité des évènements suivants :
(a) A : "Les tirages n'amènent pas de boules noires".
(b) B_k : "La première boule rouge est obtenue au k-ième tirage" (avec $k \in [\![1, n]\!]$ fixé).

Exercice 19 (*)
On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer n tirages avec remise (avec $n \geq 4$) dans une urne contenant 1 boule noire et 2 boules rouges. Calculer la probabilité de l'évènement C : "On obtient au moins une boule rouge"

Afin de calculer la probabilité de l'évènement C, on introduit les évènements N_k (resp. R_k) : "On tire une boule noire (resp. rouge) au $k^{\text{ème}}$ tirage". On a $C = R_1 \cup \ldots \cup R_n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} R_k$.

Remarque : Le problème, c'est que les évènements $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ne sont pas incompatibles. On ne peut donc pas utiliser la propriété du cours. On va alors utiliser le fait que $C = \overline{N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_n}$. On peut retrouver ce résultat en utilisant les formules de Moivre ou tout simplement en remarquant qu'obtenir au moins une boule rouge revient à ne pas obtenir que des boules noires.

Calculer la puissance d'une matrice.

Exercice 20
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(a) Vérifier que $A = I_2 + J$.
(b) Calculer J^2. En déduire J^n pour $n \in \mathbb{N}$.
(c) Démontrer en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 21 (*)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
(a) Vérifier que $A = 2I_3 + J$.
(b) Calculer J^2 et J^3. En déduire J^n pour $n \in \mathbb{N}$.
(c) En déduire la formule de A^n en utilisant le binôme de Newton.