

Questions de cours

Exercice 1 (Définitions de matrices)

(a) Quel est le nombre de lignes et de colonne de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ \sqrt{3} & 0 & -3,55 \end{pmatrix}$. Préciser ses coefficients $a_{i,j}$.

(b) Expliciter les matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 4}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 4}}$ définies par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i = j + 1 \\ -1 & \text{si } i = j - 1 \\ 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases} \quad \text{et } b_{i,j} = 2i - j \text{ pour tout } (i, j).$$

Exercice 2 (Transposée de matrice)

Donner les transposées de A, B et C avec Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = (-1 \ 7 \ 4 \ 2)$. Que vaut ${}^t({}^t A)$?

Exercice 3 (Opérations matricielles)

Calculer $A + B$, $3A$, $2A - B$, $(4 + 5)(A + B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 4 (Produit)

(a) Calculer AB avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & -1 & 4 \\ 2 & -\pi & 2 \end{pmatrix}$.

(i) Peut-on calculer AB ? Pourquoi?

(ii) Calculer $A \times {}^t B$

(c) Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer les produits AB et BA . Quelle conclusion peut-on tirer?

Exercice 5 (Puissance de matrice (1))

Calculer les matrices $(AB)^2$ et $A^2 B^2$ avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 6 (Puissance de matrice diagonale)

Soit A une matrice diagonale carré d'ordre 3. C'est à dire que $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que $\forall n \in$

$$\mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & 0 \\ 0 & a_2^n & 0 \\ 0 & 0 & a_3^n \end{pmatrix}$$

Exercice 7 (Puissance de matrice (2))

On considère la matrice :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 (Matrice inversible (1))

Montrer que :

la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 (Matrice inversible (2))

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $A(I_2 + B)$.

(b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 10 (Matrice inversible (3))

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(i) Montrer que $M^2 = 2I - M$

(ii) En déduire que M est inversible et donner son inverse

Exercice 11 (Puissance (3))

On montre une troisième façon de calculer la puissance d'une matrice.

(a) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.

(b) Calculer M^k pour tout entier naturel k .

✍ Additionner ou multiplier des matrices

Exercice 12 (Calculs)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer $A + B$, $2A - B$, AB , BA , puis $3(A - 2B) + 2(3B + C) - (2A + C)$.
 (b) Résoudre l'équation $A - 3X = 2B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13 (*)

Calculer les produits LC et CL , où $L = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 ()**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier :

$$S = (2A) \times (3B) - (A + 2B)^2 + (A - B)(A + B).$$

$$T = (A + B)(2A^2 - 2B) - 2A^2(A + B) + (-A + B)^2.$$

✍ Calculer la puissance d'une matrice carrée

Exercice 15

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Exercice 16 (*)

- (a) On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.
 (b) Calculer M^n pour tout entier naturel n .

Exercice 17 ()**

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

- (a) Montrer que $(B - 3I_2)(B - 4I_2) = 0$.
 (b) Exprimer B^2 en fonction de I et B .
 (c) Définir par récurrence deux suites de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B^n = a_n B + b_n I_2$$

- (d) Calculer a_n et b_n en fonction de n puis expliciter B^n .

✍ Inverser une matrice

Exercice 18

- (a) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer A^{-1} .

- (b) Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Exercice 19 (*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 20 ()**

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $B^3 - 3B^2 + 2B$. En déduire que B n'est pas inversible.

*Manipuler la transposée d'une matrice***Exercice 21 (Calculs)**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Calculer AB , tA , tB et ${}^tB^tA$. Vérifier que ${}^t(AB) = {}^tB^tA$

Exercice 22 (*)

- (a) Montrer que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n alors ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
(b) En déduire que si $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$, $A + B \in S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 23 ()**

On dit que A carrée d'ordre n est antisymétrique si ${}^tA = -A$. Montrer qu'une matrice carrée A peut toujours s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.