Questions de cours

Exercice 1 (Opération sur les évènements)
On lance deux fois, **successivement** ,une pièce de monnaie et on note les résultats obtenus. L'univers est

$$\Omega = \{(P;P);(P;F);(F;P);(F;F)\}$$

Soit A l'évènement "la première pièce donne pile" et B l'évènement "la deuxième pièce donne pile". Exprimer les évènements suivants en fonction de A et B puis à l'aide de l'univers Ω.

(a) C : "Au moins une des pièce donne pile"
(b) D : "Les 2 pièces donnent pile"
(c) E : "La première pièce donne Face"
(d) F : "La seconde pièce donne Face"
(e) G : "Les deux pièces donnent Face"
(f) H : "Au moins une des pièce donne Face"

Exercice 2 (Crible de Poincaré)
Des élèves d'une classe ont la possibilité de pratiquer 3 activités sportives, du tennis, du basket ou du kin ball. Ils peuvent en pratiquer une, deux, ou trois, mais ils doivent en pratiquer au moins une. On sait que 12 pratiquent du tennis, 7 du basket, 9 du kin ball, aucun élève ne pratique du tennis et du basket, 2 pratique du basket et du kin ball. Enfin 6 font du tennis et du kin ball. Il y a 20 élèves dans la classe. On croise un élève au hasard,
(a) Quelle est la probabilité de pratiquer du Basket ou du Kin Ball ?
(b) Quelle est la probabilité de pratiquer du Tennis ou du Basket ?
(c) Quelle est la probabilité qu'il pratique les 3 activités ?

Exercice 3
On lance 4 fois une pièce et on note les évènements :
A_k : "On obtient pour la première fois pile au $k^{\text{ème}}$ lancer" pour $k \in [\![1;4]\!]$ et A_0 : "On n'obtient pas de pile".
On admet que $P(A_k) = \dfrac{1}{2^k}$ pour $k \in [\![1;4]\!]$. Calculer $P(A_0)$.

Exercice 4 (Arbre pondéré)
On compte dans la population française 24% de moins de 20 ans et 17% de plus de 65 ans. 30% des moins de 20 ans ont un smartphone, 80% des 20-65 ans en ont un et 20% des plus de 65 ans. Construisez un arbre pondéré qui représente cette situation et déterminer toutes les probabilités que vous pouvez déduire de cet énoncé.

Exercice 5 (Probabilité conditionnelle)
Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée. Déterminer
(a) la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 ;
(b) la probabilité que cette pièce soit défectueuse sachant qu'elle provient de l'atelier 1.
(c) la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et soit défectueuse ;

Exercice 6
On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Exercice 7 (Formule des probabilités totale)
Dans la population française on compte 52% de femmes et 48% d'hommes. Chez les femmes il y a 20% de fumeuses et chez les hommes il y en a 30%. On choisit au hasard un individu. Quelle est la probabilité que
(a) l'individu choisi soit un fumeur, sachant que c'est un homme ?
(b) que ce soit un fumeur et un homme ?
(c) que ce soit un fumeur ?
(d) Que ce soit un homme sachant que c'est un fumeur ?

Exercice 8 (Indépendance)
(a) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements

$$A = \text{"tirage d'un nombre pair"},$$

$$B = \text{"tirage d'un multiple de 3"}.$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ?
(b) Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Exprimer des évènements en fonction d'intersection, d'union et du complémentaire

Exercice 9
On lance 3 dés à 6 faces et on note les résultats obtenus. L'univers est

$$\Omega = [\![1, 6]\!]^3$$

Soit A_i l'évènement "On obtient un 6 au $i^{ème}$ tirage" pour $i \in [\![1, 3]\!]$. Exprimer les évènements suivants en fonction des A_i

(a) B_1 : "On obtient le premier 6 au premier tirage"
(b) B_2 : "On obtient le premier 6 au second tirage"
(c) B_3 : "On obtient le premier 6 au troisième tirage"
(d) C_3 : "On obtient un triple 6"
(e) C_1 : "On obtient un seul 6"
(f) C_0 : "On n'obtient pas de 6"

Exercice 10 (*)
On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernable au toucher ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernable au toucher. On note les évènements U : "On tire une boule dans l'urne U" et N : "On tire une boule noire". Exprimez les évènements suivants :

(a) A : "On tire une boule dans l'urne V "
(b) B : "On tire une boule noire dans l'urne U ou une boule noire dans l'urne V "
(c) Comment peut-on exprimer l'évènement B plus simplement ?

Exercice 11 (**)
On effectue n tirages dans une urne qui contient des boules rouges et vertes. On note R_i l'évènement "On tire une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage." Déterminer en fonction des évènements R_i, les évènements

(a) A : "On obtient au moins une boule rouge "
(b) B : "On n'obtient que des boules rouges "

Déterminer la probabilité d'une union finie.

Exercice 12
On lance 3 fois un dé à 4 face et on note les évènements A_i : " On obtient 4 sur le dé au $i^{ème}$ lancer". On définit enfin les évènements B_i : "On obtient au moins un 4 lors des i premiers lancers". Calculez $P(B_1)$, $P(B_2)$ et $P(B_3)$.

Exercice 13 (*)
On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer n tirages avec remise (avec $n \geq 4$) dans une urne contenant 1 boule noire et 2 boules rouges.

(a) Calculer la probabilité de l'évènement C : "On obtient la même couleur au premier et au dernier tirage"
(b) On considère les évènements D : "Les tirages 1 et 2 amènent chacun une boule noire", E : "Les tirages 2 et 3 amènent chacun une boule noire" et F : "Les tirages 3 et 4 amènent chacun une boule rouge". Calculer la probabilité qu'au moins un de ces évènements soient réalisés.

Exercice 14 (**)
On considère des évènements $(A_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ formant un système complet d'évènement et tel que

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \quad P(A_i) = \frac{i}{n(n+1)}.$$

Déterminer $P(A_0)$.

Déterminer la probabilité d'une intersection finie.

Exercice 15
Dans une urne, il y a 8 boules vertes et 12 boules rouge. On tire 2 boules l'une après l'autre.

(a) On remet la boule tirée dans l'urne. Calculez la probabilité que les 2 boules tirées soient vertes.

(b) On ne remet pas la boule tirée dans l'urne. Calculez la probabilité que les 2 boules tirées soient vertes.

Exercice 16 (*)
On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer 3 tirages dans une urne contenant 3 boules noires et 5 boules rouges. On suppose que les tirages se font sans remise. Quelle succession de couleurs a-t-on le plus de chance d'obtenir ; R-N-R ou N-R-N ?

Exercice 17 (**)
On dispose de deux urnes. L'urne U contient une boule blanche et quatre boules noires ; l'urne V contient trois boules blanches et deux boules noires. Dans l'une des urnes choisie au hasard, on effectue une série de tirages d'une boule avec remise (tous les tirages ont lieu dans la même urne). Soit A_i l'évènement “la i-ème boule tirée est blanche”.

(a) Calculer $P(A_1)$, $P(A_2)$. A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?

(b) Calculer $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Sachant que les $(n-1)$ premiers tirages donnent chacun une boule blanche, quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au n-ième tirage ?

(d) Sachant que les n premières boules tirées sont blanches, quelle est la probabilité d'avoir tiré dans U ?

Déterminer une probabilité conditionnelle, Utiliser la formule des probabilités totales.

Exercice 18
Dans une classe d'ECE, On a 1/3 de garçons pour 2/3 de filles. Au dernier SIGMA, 2 garçons sur 5 ont au dessus de la moyenne alors que 7 filles sur 10 ont obtenus moins que la moyenne. On choisit un élève au hasard.

(a) Sachant que c'est une fille, quelle est la probabilité que cette élève ait la moyenne ?

(b) Quelle est la probabilité que ce soit une fille qui ait la moyenne ?

(c) Quelle est la probabilité qu'un élève ait obtenu la moyenne ?

(d) On tire maintenant au hasard un élève parmi ceux qui ont obtenus la moyenne. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

(e) Les évènement "être un garçon" et "obtenir la moyenne" sont-ils indépendants ?

Exercice 19 (*)
Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2, et 30% pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

(a) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

(b) Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Exercice 20 (**)
Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On note G_n l'évènement "Le joueur gagne la $n-$ième partie et p_n la probabilité de l'évènement G_n. On admet que $p_1 = 0,1$, que s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8. S'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

(a) Montrer que $p_2 = 0,62$.

(b) Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

(c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.

(d) Déterminer l'expression de p_n.

Exercice 21 (* Le jeu des portes)**
On dépose au hasard un cadeau derrière l'une d'entre trois portes. Un jeu consiste à trouver ce cadeau en deux étapes. D'abord vous choisissez une porte ; puis l'organisateur vous montre parmi les deux portes restantes, une porte derrière laquelle le cadeau ne se trouve pas. Vous avez alors la possibilité entre changer de choix où le garder : que faites-vous ?