

Questions de cours

Exercice 1 (Démonstration par récurrence)

Montrer par récurrence les propositions suivantes.

(a) Pour tout n entier, $2^n \geq n + 1$.

(b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle telle que $u_1 = \frac{5}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{n}$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 2^n$.

Exercice 2 (Majoration, minoration)

Démontrer que la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2^n}$ est positive.

Exercice 3 (Monotonie des suites définies explicitement)

Déterminer la monotonie de la suite u définie pour tout entier $n \geq 2$ par :

$$u_n = n^2 - 4n + 1.$$

Exercice 4 (Méthode des soustractions)

Déterminer la monotonie des suites u définie pour tout entier n par

(a) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - (n + 1)$.

(b) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice 5 (Méthode des divisions)

Déterminer la monotonie des suites u définie pour tout entier n par :

(a) $u_n = \frac{5^n}{2^{n+1}}$

(b) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2^n}$.

Exercice 6 (Monotonie démontrée par récurrence)

Déterminer la monotonie de la suite u définie pour tout entier n par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$$

Exercice 7 (suite géométrique)

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exercice 8 (Suites arithmético-géométrique)

Déterminer la formule explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$.

Exercice 9 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

Déterminer le terme général des suites suivantes en fonction de n :

(a) $u_0 = -1, u_1 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

(b) $u_1 = 3, u_2 = 17, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.

Démontrer par récurrence

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 1$.

Exercice 11 (*)

La suite v définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 4v_n + 1$ est définie explicitement par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

Exercice 12 (**)

Calculer les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$$

puis conjecturer une formule explicite et la démontrer par récurrence.

Exercice 13 ()**

Montrer par récurrence la propriété suivante :

Soit u une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Exercice 14 (*)**

Démontrer, en raisonnant par récurrence :

Pour tout entier n , $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11.

 Déterminer la monotonie

Exercice 15

Dans chacun des cas suivants, étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{3^n}{4^{n-1}}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(n)$.

(d) $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

(e) $u_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$.

Exercice 16 (*)

On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

(a) Montrer que $\forall n \geq 0$, u_n existe et $u_n > 0$.

(b) En déduire la monotonie de u

Exercice 17 ()**

On considère la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = \exp(u_n) - 1$ et la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1$.

(a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution qui est 0. Déterminer le signe de $f(x) - x$. Préciser le sens de variations de f .

On suppose ici que $u_0 = 1$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq u_{n+1}$.

(c) Montrer que si $x \geq 1$ alors $f(x) \geq (e-1)x$.

(d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq (e-1)^n$.

 Déterminer si la suite est majorée ou minorée

Exercice 18

Soit u la suite telle que $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq 2u_n$. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3 \times 2^n$.

Exercice 19 (*)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

(b) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 , puis conjecturer une formule générale donnant u_n en fonction de n .

(c) Prouver la conjecture de la question précédente.

Exercice 20 ()**

Dans cet exercice on considère des suites monotones $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme u_0 .

(a) Si la suite (u_n) est croissante alors elle est minorée par u_0 .

(b) Si la suite (u_n) est décroissante alors elle est majorée par u_0 .

☞ Déterminer la formulation explicite des suites classiques.

Exercice 21

Déterminer les formules explicites des suites suivantes :

- (a) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n + 4$.
- (b) $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 1, v_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.
- (c) $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 = 1, w_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} + 5w_{n+1} + 4w_n = 0$.

Exercice 22 (*)

La suite (u_n) est définie par

$$\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{4} \\ u_{n+1} &= \frac{3u_n}{2u_n - 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2}$. On admet que les termes u_n et v_n sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 23 (*)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 2u_n + 3^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire $v_n = \frac{u_n}{3^n}$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. En déduire la valeur de u_n en fonction de n .

Exercice 24 ()**

On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2; y_0 = -1$ et les relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} &= -2x_n + y_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} &= 2x_n - 3y_n \end{cases}$$

- (a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$$
- (b) En déduire une expression de x_n et y_n en fonction de n .

Exercice 25 ()**

On définit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = 0$ et $b_0 = 12$, puis pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}.$$

- (a) On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = b_n - a_n$.
 - (i) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme à préciser.
 - (ii) En déduire l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n .
- (b) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 4b_n + 3a_n$.
 - (i) Montrer que la suite (v_n) est constante.
 - (ii) Préciser quelle est la valeur constante de v_n .
- (c) A l'aide des questions 1(b) et 2(b), calculer les expressions de a_n et b_n pour tout entier naturel n .
- (d) Calculer $S_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$ en fonction de n .

Exercice 26 (*)**

La suite de Fibonacci est une suite très célèbre. Elle est définie par $u_0 = 1, u_1 = 1$ et pour tout n entier $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Déterminez sa formule explicite.