

## Questions de cours

### Exercice 1 (Variable aléatoire)

On tire aléatoirement un nombre **réel** entre 0 et 1 et on note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre tiré

- Déterminer le support de  $X$ . Que remarque-t-on ?
- Quelle est la probabilité de tirer un nombre plus grand que 0,5 ? entre 0,2 et 0,6 ?.
- Quelle est la probabilité de tirer le nombre 0,158 ?
- Déterminer la fonction de répartition de  $X$  et tracez la.

### Exercice 2 (Fonctions de répartition (2))

- Montrer que la fonction suivante est une fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{sinon} \end{cases}$$

- En déduire une densité de probabilité associée.

### Exercice 3 (Variable à densité)

On considère  $X$  la variable aléatoire de densité  $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

- Calculer  $P(X \leq 2)$  et  $P(X > 1)$ .
- Calculer  $P(X = 3)$  et  $P(1/2 < X < 1)$ .

### Exercice 4 (Loi de Pareto)

Soit  $a > 0$ . Montrer que la fonction

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{a}{t^{a+1}} & \text{si } t \in [1; +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité. On considère  $X$  une variable aléatoire admettant  $f_a$  pour densité. Trouver la fonction de répartition de  $X$ .

### Exercice 5 (Changement de VA)

On reprend la fonction  $f_a$  de l'exercice précédent et on considère  $Y = 3X$ . Déterminer la fonction de répartition de  $Y$ .

### Exercice 6 (Espérance)

Soit  $f$  la fonction

$$f(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } t \in [-1; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Montrer que  $f$  est une densité d'une variable aléatoire  $X$  et donner la fonction de répartition de  $X$ .
- Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer

### Exercice 7 (Espérance)

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(t) = \frac{e^t}{(1 + e^t)^2}$$

- Montrer que  $f$  est une densité d'une variable aléatoire  $X$  et donner la fonction de répartition de  $X$ .
- $X$  admet-elle une espérance ?

### Exercice 8 (Linéarité de l'espérance)

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(t) = ae^{-t^2}$

- Déterminer  $a$  pour que  $f$  soit une densité d'une variable aléatoire  $X$ . Calculer son espérance.
- On considère la variable aléatoire  $Y = 3X + 4$ . Montrer que  $Y$  admet une espérance et calculer  $E(Y)$ .

**Exercice 9 (Loi uniforme (2))**

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démontrer que la fonction  $f$  est une densité de probabilité.

**Exercice 10 (Loi uniforme et fonction de répartition)**

Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi uniforme sur  $[a; b]$ .

**Exercice 11 (Loi uniforme et espérance)**

Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi uniforme sur  $[a; b]$ .

**Exercice 12 (Loi exponentielle (1))**

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démontrer que la fonction  $f$  est une densité de probabilité.

**Exercice 13 (Loi exponentielle et fonction de répartition)**

Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

**Exercice 14 (Loi exponentielle et espérance)**

Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

**Exercice 15 (Loi normale centrée réduite)**

Montrer que la fonction  $f$  définit par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

est une densité de probabilité.

**Exercice 16 (Utilisation de la table)**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

- Calculer  $P(X < 0, 54)$ ,  $P(X \geq 2, 53)$ ,  $P(0 < X < 2, 35)$ .
- Déterminer  $t > 0$  tel que  $P(-t < X < t) \approx 0,95$ .

**Exercice 17 (Loi normale)**


Montrer que la fonction  $f$  définit par  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  est une densité de probabilité.

**Exercice 18 (Espérance)**

Soit  $X$  suivant une loi normale de paramètre  $(\mu, \sigma^2)$ . Calculer l'espérance de  $X$ .

**Exercice 19 (Utilisation de la table(2))**

- Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi normale  $\mathcal{N}(8, 4)$ . Donner les valeurs approchées pour  $P(X < 7, 5)$ ,  $P(X > 8, 5)$ ,  $P(6, 5 < X < 10)$ ,  $P_{(X>5)}(X > 6)$ .
- Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi normale. Déterminer l'espérance et la variance de  $X$  sachant que  $P(X < -1) \approx 0,0495$  et  $P(X > 3) \approx 0,1202$ .

 *Table loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$* 

$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

 *Montrer qu'on a une fonction de répartition*

**Exercice 20**

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions de répartition d'une variable aléatoire à densité. Le cas échéant, déterminer une densité associée.

$$F_1(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

 *Montrer qu'on a une densité de probabilité*

**Exercice 21**

Montrer que la fonction  $f$  suivante est une densité de probabilité. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 22**

La fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$  est-elle une densité de probabilité ?

**Exercice 23**

La fonction  $f$  définie par  $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1; 0] \\ 1-x & \text{si } x \in ]0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est-elle une densité de probabilité ?

*Calculer, si elle existe une espérance*

**Exercice 24**

Soit  $X$  une variable aléatoire admettant pour densité la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 25**

Même question avec la densité définie par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

**Exercice 26**

Même question avec la densité définie par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-2|x|}$ .

*Déterminer la loi d'une transformée affine*

**Exercice 27 (Transformation affine - A connaitre)**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $[0; 1]$ , soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Montrer que la variable aléatoire  $Y = a + (b - a)X$  suit une loi uniforme sur  $[a; b]$ .

**Exercice 28 (Transformation affine)**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1 et  $\lambda > 0$ . Montrer que la variable aléatoire  $Y = \frac{1}{\lambda}X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

**Exercice 29**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et soit  $Y = -X$ . Prouver que  $Y$  est une variable aléatoire à densité et préciser une densité  $g$  de  $Y$ .

**Exercice 30 (Loi uniforme et binomiale)**

Soient  $X_0, \dots, X_n$  des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$ , indépendantes.

- Soit  $0 \leq k \leq n$  et soit  $U_k = \max(X_0, \dots, X_k)$ . Démontrer que  $U_k$  admet une densité que l'on déterminera.
- Soit  $N$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, 1/2)$ . Démontrer que  $U = \max(X_0, \dots, X_N)$  admet une densité que l'on déterminera.

**Exercice 31 (Loi uniforme et loi exponentielle)**

Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$ . Reconnaitre la loi de  $T = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$ . Écrire un programme scilab qui simule une loi exponentielle.

**Exercice 32 (Loi exponentielle)**

Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ . On pose  $Y = e^{-X}$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire à densité. Reconnaitre la loi de  $Y$ .

*Utiliser la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite*

**Exercice 33**

Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y = e^X$ . Déterminer  $F_Y$  en fonction de  $\Phi$ , puis déterminer une densité  $f_Y$  et calculer enfin  $E(Y)$ , si elle existe, à l'aide d'un changement de variable.

**Exercice 34**

Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y = X^2$ .

- Montrer que la fonction de répartition de  $Y$  est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \begin{cases} 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- En déduire que  $Y$  est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de  $Y$ .

 *Sujets de concours*

**Exercice 35 (D'après EML)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) A quelle condition sur  $\alpha$  a-t-on que  $f$  est une densité d'une v.a.  $X$  ?  
 (b) Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.  
 (c) On note  $Y$  la variable aléatoire égale à la partie entière de  $X$  :

$$\forall k \geq 2, P(Y = k) = P(k \leq X < k + 1).$$

Donner la loi de  $Y$ .

**Exercice 36 (EML 1996)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\begin{cases} f(x) = e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- (a) Etudier les variations de  $f$  et tracer sa représentation graphique.  
 (b) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.  
 (c) Soit  $X$  une variable aléatoire réelle admettant  $f$  comme densité.

- (i) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .  
 (ii) Montrer que  $X$  admet une espérance et calculer l'espérance de  $X$ .  
 (iii) On pose  $Y = |X|$ .

Déterminer la fonction de répartition  $G$  de  $Y$ . Montrer que  $Y$  est une variable à densité et déterminer une densité  $g$  de  $Y$ .

**Exercice 37 (ECRICOME 2008)**

On considère un jeu où le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre  $O$  et de rayon 1. Pour  $1 \leq i \leq 3$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de centre  $O$  de la  $i^{\text{ème}}$  fléchette. Ces trois variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3$  de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité  $f$  est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le joueur gagne si la distance la plus proche du centre  $O$  se trouve à une distance inférieure à  $\frac{1}{5}$  de ce centre. Enfin, on note  $M$  la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances  $X_1, X_2, X_3$ .

- (a) Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X_i$ .  
 (b) Déterminer l'espérance de  $X_i$ .  
 (c) Exprimer l'événement  $[M > t]$  à l'aide des événements  $[X_1 > t], [X_2 > t], [X_3 > t]$  pour tout réel  $t$ .  
 (d) Déterminer la fonction de répartition  $F_M$  de  $M$  et montrer que  $M$  est une variable à densité et en donner une densité notée  $f_M$ .  
 (e) Quelle est la probabilité de l'événement  $G = \text{"le joueur gagne la partie"}$  ?