Questions de cours

Exercice 1 (Montrer qu'une application est linéaire)
Montrer que les applications suivantes sont linéaires

(a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x+2y \\ 2y-x \\ x+3y \end{pmatrix} \end{array}$ (b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & -x+y+z \end{array}$

Exercice 2 (Montrer qu'on a un endomorphisme)
Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes d'un espace vectoriel que l'on précisera.

(a) $g_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x \\ y-x \end{pmatrix} \end{array}$ (b) $g_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix} \end{array}$

Exercice 3 (Déterminer la matrice associée)
Déterminer les matrices associées aux applications f_1, f_2, g_1 et g_2 des exercices précédents.

Exercice 4 (Déterminer le noyau d'une application linéaire)
Soit f l'application de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ 2x_1+2x_2 \end{pmatrix}$$

Déterminer $Ker(f)$.

Exercice 5 (Déterminer que l'on a un EV)
Montrer que l'application suivante est linéaire.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & x_1-2x_2+x_3 \end{array}$$

En déduire que l'espace $E = \{x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$ est un espace vectoriel

Exercice 6 (Déterminer l'image d'une application linéaire)
Soit f l'application de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ 2x_1+2x_2 \end{pmatrix}$$

Déterminer $Im(f)$.

Montrer qu'une application est linéaire

Exercice 7
Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Déterminer $Ker(f)$ puis $Im(f)$ lorsqu'elles le sont.

(a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 4x-6y \\ 2x-3y \end{pmatrix} \end{array}$ (b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1-x_2+x_3+x_4 \\ x_1+2x_2-x_4 \\ x_1+x_2+3x_3-3x_4 \end{pmatrix} \end{array}$

Exercice 8 (*)
Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Déterminer $Ker(f)$ puis $Im(f)$ lorsqu'elles le sont.

(a) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{array}$

(b) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x+y-3z \\ 3x+2y-4z \end{pmatrix} \end{array}$

Exercice 9 (**)
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère l'application Φ définie par

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

(a) Montrer que Φ est une application linéaire

(b) Montrer que : $Ker(\Phi) = \{0\} \Longleftrightarrow A$ est inversible.