Questions de cours

Exercice 1 (Fonctions définies par une intégrale.)
On considère la fonction définie pour tout $x \in [1; +\infty[$ par

$$F : x \to \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$$

(a) Déterminer $F(x)$ pour tout $x \in [1; +\infty[$.

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Exercice 2 (Intégrales impropres (1))
Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes et calculer leur valeur quand c'est possible.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$. (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 dt$. (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(t) dt$.

Exercice 3 (Intégrales impropres (2))
Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes et calculer leur valeur quand c'est possible.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt$. (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$. (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} dt$.

Exercice 4 (Intégrale de Riemann (1))
Démontrer que la fonction $f : t \to \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Exercice 5 (Intégrale de Riemann (2))
Démontrer que la fonction $f : t \to \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$. Dans ce cas

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Exercice 6 (Intégrale exponentielle)
Démontrer que la fonction $f : t \to e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0; +\infty]$ si et seulement si $\alpha > 0$. Dans ce cas

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$$

Exercice 7 (Intégrale ln)
Démontrer que la fonction $f : t \to \ln(t)$ est intégrable sur $]0; 1]$ et on a

$$\int_0^1 \ln(t) dt = -1$$

Exercice 8 (Gaussienne)
Soit $\sigma \neq 0$, à l'aide d'un changement de variable, montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx$$

est convergente et calculer sa somme.

Exercice 9 (Linéarité)

(a) Démontrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} + \frac{4}{t^3} dt$$

est convergente et donner sa valeur.

(b) (i) Montrer que

$$\forall t > 0,\ \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

(ii) Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}.$$

Exercice 10 (Comparaison)
Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes par comparaison

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2}dt.$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^3)}dx.$ (c) $\displaystyle\int_0^1 ln(t)^4 dt.$

Exercice 11 (Intégrabilité)
Montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

est absolument convergente.

Étudier la nature et calculer la valeur d'une intégrale généralisée.

Exercice 12
Étudier la nature des intégrales suivantes et donner leurs valeurs le cas échéant :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$ (b) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,dt.$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt.$

Exercice 13 (*)
Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$.

(a) Calculer $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

(b) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^t-e^{-t}}dt.$

Exercice 14 (**)
Montrer que grâce à une intégration par parties, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^3e^{-t^2}dt$$

converge et donner sa valeur.

Étudier la nature et calculer la valeur d'une double intégrale généralisée.

Exercice 15
Étudier la nature des intégrales suivantes et donner leurs valeurs le cas échéant :

(a) $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,dt$ (b) $\displaystyle J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\,dt$

Exercice 16 (*)

(a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^t}{(1+e^t)^2}\,dt$ converge et vaut $\ln(2)$.

(b) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{(1+e^t)^2}\,dt$

Exercice 17 (**)
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(a) On suppose que f est paire. Montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ aussi et que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

(b) On suppose que f est impaire. Montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ aussi et que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0$$

Étudier la nature d'une intégrale généralisée par comparaison.

Exercice 18

(a) Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

(b) Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$.

(c) En déduire la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+t^2}dt$.

(d) Quelle est la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$?

Exercice 19 (*)

Pour tout $a > 0$, et pour tout entier n, on note

$$I_n(a) = \int_0^a t^n e^{-t}dt \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$$

L'objectif du problème est de montrer que les intégrales I_n existent et calculer leur valeur.

(a) Calculer $I_0(a)$, puis déterminer la valeur de I_0.

(b) Trouver une relation de récurrence entre $I_{n+1}(a)$ et $I_n(a)$.

(c) Démontrer que l'intégrale I_n converge.

(d) Écrire la relation liant I_n et I_{n+1}. Déterminer alors la valeur de I_n en fonction de n.

Sujets de concours

Exercice 20 (Edhec 2004)

Le but de cet exercice est de calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt$ et on a, en particulier, $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}dt$

(a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier lexistence de u_n.

(b) Calculer u_0 et u_1.

(c) (i) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(ii) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ln(2)$

(iii) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

(d) (i) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme dune intégrale.

(ii) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(2) - u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

(iii) Donner la limite de la suite (u_n)

(e) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

(i) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.

(ii) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n-1}$

(iii) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, puis donner la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$.