Questions de cours

Exercice 1 (Dérivées secondes)
Montrer que les fonctions suivantes admettent une dérivées seconde sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer :

(a) $x \to x^2+1$ (b) $x \to e^x$ (c) $x \to \ln(x)$

Exercice 2 (Fonctions $\mathcal{C}^\infty$)
Montrer que les fonctions $x \to e^x$ et $x \to x^3+3x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)
Soit $g : x \longmapsto \frac{1}{2}x\,|x|$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Convexité)
(a) Montrer que la fonction exponentielle est convexe.
(b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0
(c) En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1+x$.

Exercice 5 (Concavité)
Procéder de la même manière pour prouver que $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.

Exercice 6 (Point d'inflexion)
Montrer que la courbe du polynôme P défini par $P(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 7x - 5$ admet deux points d'inflexions dont on précisera l'abscisse.

Étudier la régularité d'une fonction

Exercice 7 (*)
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
(b) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ lorsque $x \neq 0$.
(c) Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$. En déduire que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et la valeur de $f'(0)$.

Exercice 8 (**)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}\ f^{(n)}(x)\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$
(b) Calculer la dérivée n-ème de la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

Étudier la convexité des fonctions

Exercice 9
Étudier la convexité des fonctions :

(a) $f : x \to e^{\frac{1}{x}}$ (b) $g : x \to (x+1)^{x+1}$.

Exercice 10 (*)
Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.

Exercice 11 (*)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

(a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter f'.
(b) Dresser le tableau de variation de f avec ses limites.
(c) Sur quels intervalles la fonction f est-elle convexe ? concave ? Déterminer les points d'inflexion de f.
(d) Tracer dans un repère orthonormé $\mathscr{C}_f$, ainsi que la tangente au point d'inflexion.

Sujets de concours

Exercice 12 (EML 2012)
On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0;+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

(b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0;+\infty[$.

(c) Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

(d) Montrer que f est convexe sur $]0;+\infty[$.

(e) On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

   (i) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.

   (ii) Déterminer les points d'intersection de Γ et, de l'axe des abscisses.

   (iii) Préciser la nature de la branche infinie de Γ.

   (iv) Tracer l'allure de Γ. On admet : $0,36 \leq e^{-1} < 0,37$.

Exercice 13 (EML 2014)
On considère la fonction φ définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(x) = e^x - xe^{\frac{1}{x}}$.

(a) Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0;+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \dfrac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$.

(b) Etudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'(x) \geqslant e$.

(c) Déterminer les limites de φ en 0 et en $+\infty$.

(d) On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3;+\infty[, \varphi(x) \geqslant ex$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.

(e) Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

(f) Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0, en $+\infty$ et la valeur en 1. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.
On précisera la nature de la branche infinie au voisinage de 0.

Exercice 14 (ECRICOME 2006)
On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x + 1 + 2e^x$$

Étude de f.

(a) Etudier les variations de f et donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

(b) Déduire des variations de f l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2,-1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. (on rappelle que $e \simeq 2,7$)

Etude d'une suite réelle.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

(a) Prouver que f est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que que pour tous réels x et t :

$$f(x) + (t-x)f'(x) \leq f(t)$$

(b) En déduire l'inégalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_{n+1}$.
Puis que pour tout entier naturel n. : $\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \leq -1$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel à préciser

(c) On admet que pour tout x de l'intervalle$[-2,-1]$:

$$0 \leq (x-\alpha) f'(x) - f(x) \leq \frac{(x-\alpha)^2}{e}$$

(i) Prouver alors que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n-\alpha)^2}{e}$$

(ii) Puis démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n-1}}$$

(d) Écrire un programme en langage Scilab permettant, lorsque l'entier naturel p est donné par l'utilisateur, de calculer une valeur approchée de α, de telle sorte que l'on ait :

$$0 \leq u_n - \alpha \leq 10^{-p}$$