Questions de cours

Exercice 1 (Introduction aux variables aléatoires)
On lance une pièce de monnaie (probabilité d'obtenir pile p) jusqu'à obtenir pile. On note X le numéro du premier lancer qui donne pile.

(a) Déterminer Ω l'univers de l'expérience aléatoire.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on introduit les évènements A_k "le premier pile est obtenu au $k-$ième lancer" et P_k "on a obtenu pile au k-ième lancer".

(b) Déterminer, $P(A_1), P(A_2), P(A_k)$.

(c) On note l'évènement A : "On obtient au moins un pile". Décrire l'évènement A en fonction des A_k et calculer $P(A)$.

(d) Quel est l'ensemble de départ et d'arrivée de X ?

Exercice 2 (Expressions de variables aléatoires)
On reprend l'énnoncé de l'exercice 1. Exprimer les événements $(X = 1), (X = 2), (X = k), (X < 3), (X \leq n), (X > n)$ en Français puis en fonction des événements $(A_i, i \geq 1)$.Calculer leurs probabilités.

Exercice 3 (Lancer de dé)
On lance deux dés. On note X la VA qui note la valeur du premier dé et Y la VA qui note la valeur du deuxième dé. Soit $Z = \max(X, Y)$. Que vaut $Z(\Omega)$?. Déterminer $P(Z = i)$.

Exercice 4 (Expression de la FPT)
On reprend l'énoncé de l'exercice 1.

(a) Écrire le système complet d'évènement associé à X.

(b) On note Y la variable aléatoire associée au rang d'apparition du deuxième pile.
  (i) Déterminer $P_{X=k}(Y = n)$ si $k \geq n$.
  (ii) Si $k < n$, montrer que $P_{X=k}(Y = n) = (1 - p)^{n-k-1}p$.
  (iii) Calculer $P(Y = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1$.

Exercice 5 (VA X^2)
On tire un dé à 6 faces on note X le résultat. On considère $Y = X^2$.

(a) Que vaut g telle que $Y = g(X)$?

(b) Que vaut $Y(\Omega)$?

(c) Que vaut $P(Y = k)$ pour $k \in Y(\Omega)$?

Exercice 6 (Lois de VA)

(a) Dans le premier exercice, déterminer la loi de X du premier pile obtenu.

(b) On lance une pièce équilibrée une fois. On note X le nombre de piles. Donner la loi de X.

(c) On tire un dé et on note X sa valeur. Donner la loi de X et de X^2.

Exercice 7 (Fonction de répartition)
soit X une variable aléatoire dont voici la loi de probabilité

x_i	-3	2	5	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(a) Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable X .

(b) Représenter graphiquement F_X. Que remarque-t-on ?

Exercice 8 (Fonction de répartition)
Un sac contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire deux boules avec remise : on note X_1, le numéro de la première boule , X_2 celui de la deuxième boule. Soit Y le plus grand des 2 : $Y = \max(X_1, X_2)$.On veut déterminer la loi de Y.

(a) Déterminer $Y(\Omega)$.

(b) Décrire par une phrase les évènements $[Y \leq 2]$ et $[Y = 2]$

(c) Justifier que la fonction de répartition F de Y est telle que,$\forall k \in \{1, ..., 5\}$, $F(k) = \left(\frac{k}{5}\right)^2$

(d) En déduire la loi de Y.

(e) Vérifier que $\sum_{k=1}^{5} P(Y = k) = 1$

Exercice 9 (Calcul d'espérance)

(a) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X de l'exercice 7

(b) On considère X la variable aléatoire qui indique le premier succès dans une expérience de pile ou face. Déterminez $X(\Omega)$ puis la loi de X. X admet-elle une espérance ? Si oui calculez-là.

Exercice 10 (Variable aléatoire centrée)

montrer que si X est une variable aléatoire admettant une espérance $E(X)$, alors la variable aléatoire $X - E(X)$ est une variable aléatoire **centrée**

Exercice 11 (Théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$$

(a) Montrer que l'on a bien défini une loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

(b) On définit alors la variable aléatoire $Y = \frac{1}{1+X}$ .Montrer que Y admet une espérance et que $E(Y) = 1 - e^{-1}$

Exercice 12 (Moments d'ordre r)

Soit X une VA telle que $\forall k \in \mathbb{N}$ $P(X = k) = \frac{a}{3^k}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

(a) Pour quelle valeur de a cela définit bien une loi de probabilité pour X ?

(b) X admet-elle un moment d'ordre 1, d'ordre 2 ? Si oui calculer-le.

Exercice 13 (Loi centrée réduite)

Soit X une variable aléatoire admettant une **variance non nulle.** Montrer que la variable aléatoire $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire discrète centrée réduite

Exercice 14 (Loi géométrique)

Une entreprise appelle des clients potentiels afin de leur vendre des volets roulants. On estime qu'environ 2% des clients potentiels achèteront effectivement le produit proposé. On note X la variable aléatoire égale au rang d'appel du premier client potentiel qui achètera effectivement le produit.

(a) Donner la loi de X

(b) Quelle est la probabilité que l'on obtienne le premier acquéreur après 1 appel ? 3 appels ?

(c) Quelle est la probabilité que l'on obtienne le premier acquéreur en moins de 4 appels ?

Exercice 15 (Loi de poisson)

Soit X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Vérifiez que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$$

Déterminer une loi de probabilité discrète

Exercice 16
On note X la variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=n) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

(a) Montrer que X est bien une variable aléatoire (c'est à dire vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1$.

(b) Montrer que X possède une espérance et que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 17 (*)
Un sauteur essaye successivement les hauteurs 1, 2, ..., n, ... jusqu'à ce qu'il échoue. Il a une probabilité $\frac{1}{n}$ de réussir son saut à la hauteur n. Soit X la hauteur du dernier saut réussi. (Il finit toujours par échouer et les sauts sont indépendants).

(a) Donnez $X(\Omega)$. Trouver la loi de X. Vérifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

(b) Calculer si possible, $E(X)$, $V(X)$.

Calculer l'espérance et la variance

Exercice 18
Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance m et de variance σ^2. Calculer $E(2X)$, $E((X-3)^2)$, $V(5X)$ et $V(3X+1)$.

Exercice 19 (*)
Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche. Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

(a) Déterminer la loi de X et son espérance

(b) Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.

Loi géométrique et loi de Poisson

Exercice 20
Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p \in]0;1[$ On effectue des tirages successifs avec remise. Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

(a) Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.

(b) Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième boule blanche. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.

Exercice 21 (*)
Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre N de voitures arrivant au péage en une heure suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les conducteurs choisissent leur file au hasard, indépendamment les uns des autres. On note X_1 le nombre de voitures arrivant au guichet 1 en une heure.

(a) Donner $E(N)$ et interpréter la valeur λ.

(b) Avec quelle probabilité une voiture arrivant au péage va-t-elle au guichet 1 ?

(c) Calculer $P_{(N=n)}(X_1 = k)$ pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ puis pour $k > n$.

(d) En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer $P(X_1 = k)$.

(e) Déduire la loi de X_1, son espérance et sa variance.

Exercice 22 (*)
Une usine produit tous les jours 100 000 bouteilles plastiques. Environ 1 % des bouteilles sont défectueuses. 1000 bouteilles doivent être livrées à un client . On considère que ce prélèvement dans le stock général est infime et donc que les évènements étudiés sont indépendants. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bouteilles défectueuses dans le lot livré au client

(a) (i) Donner la loi de X

(ii) Quelle est la probabilité d'avoir 5 bouteilles défectueuses dans le lot ?

(iii) Quelle est la probabilité d'avoir moins de 3 bouteilles défectueuses dans le lot ?

(b) Afin de simplifier les calculs, on décide d'approcher cette loi par une loi de Poisson

(i) Quel est le paramètre de la loi de Poisson ?

(ii) Quelle est la probabilité d'avoir 5 bouteilles défectueuses dans le lot ?

(iii) Quelle est la probabilité d'avoir moins de 3 bouteilles défectueuses dans le lot ?

Exercice 23 (**)
Soient a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$: On effectue une suite d'expérience aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B : On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que A donne "pile" est a ; et que la probabilité que B donne "pile" est b : Soit X le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que A donne "face" pour la première fois et Y le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que B donne "face" pour la première fois.

(a) Quelles sont les lois de probabilités de X et de Y ? Calculer $E(X)$:

(b) Calculer la probabilité de l'évènement $(X = Y)$: Interprétation.

(c) Trouver, pour $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $P(X > k)$: En déduire les probabilités $P(X > Y)$ et $P(X < Y)$: Interprétation.

Suite de variables aléatoires

Exercice 24 (*)
Une piste rectiligne infinie est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, 3, \dots$ de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut.On suppose qu'elle a la même probabilité de sauter de une ou de deux cases à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts

(a) Donner la loi de Y_n, $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

(b) (i) Exprimer X_n en fonction de Y_n et n.

(ii) En déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$ puis la loi de X_n

Exercice 25 (*)
Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue dans cette urne des tirages successifs, au hasard. A chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée et on la remet dans l'urne en ajoutant en plus une boule de la même couleur que celle qui vient d'être tirée. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages. On note aussi B_n (respectivement R_n) l'évènement : on tire une boule blanche (respectivement rouge) au n-ième tirage*

(a) Déterminer la loi de X_1 et la loi de X_2

(b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n suit une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$