Questions de cours

Exercice 1 (Fonctions composées)
Dans chaque cas, donner l'ensemble de définition et décrire à l'aide d'une formule les fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$.

(a) $u : x \to x - 2$ et $v : x \to \sqrt{x}$.

(b) $u : x \to x^3 - 2x$ et $v : x \to \dfrac{1}{x}$.

Exercice 2 (Fonctions paires et impaires)
Déterminer la parité des fonctions suivantes.

(a) $f : x \to \dfrac{1}{x^3 - 2x}$

(b) $g : x \to \sqrt{x-2}$

(c) $h : x \to \ln(x^2 - 4)$.

Exercice 3 (Majorants et minorants)
Trouver si possible, un minorant et un majorant des fonctions suivantes sur D :

(a) $f : x \to x^2 + 1$, $D = [0, 2]$.

(b) $g : x \to e^x$, $D =]-\infty; 0]$.

Exercice 4
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivante (démonstration directe)

(a) $\sqrt{e^{2x}} > 4$

(b) $\dfrac{2}{e^x + 3} < 5$

Exercice 5 (Fonctions croissantes et décroissantes)
Déterminer la monotonie des fonctions suivantes.

(a) $f : x \to \dfrac{1}{3}x^3 - 25x + 3$

(b) $g : x \to x^2 + x - \ln(x+3)$

Exercice 6 (Équation de la tangente)
Dans chaque cas, déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

(a) $f : x \to \ln(1 + x)$, $a = 0$.

(b) $g : x \to e^{x^2+1}$, $a = 1$.

Exercice 7 (Maximum et Minimum)
Déterminer les minimums et maximums des fonctions suivantes sur l'ensemble D.

(a) $f : x \to \ln(1 + x^2)$, $D = [-2; 4]$.

(b) $g : x \to x^3 + x^2 - x$, $D = [-2; 1]$.

Exercice 8 (Somme de limites)
Déterminer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 3$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} - 5$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^3 + x + 1$

Exercice 9 (Produit de limites)
Déterminer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+3)(x-2)$

(b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1 + \ln(x)}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5(x+1)e^x$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(-2 + \dfrac{1}{x}\right)$

(e) $\lim\limits_{xto-\infty} (x+2)e^{-x}$

(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x}\left(1 + e^{-x}\right)$

Exercice 10 (Quotient de limites)
Déterminer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{2x}$

(b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{-3x}{x-1}$

(c) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{-3x}{x-1}$

(d) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \dfrac{-3x+4}{2+x}$

(e) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{1}{3-x}$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{\ln(x)}$

Exercice 11 (Composée de limites)
Déterminer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-1)^3$

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 5 \\ >}} \dfrac{1}{(5-x)^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3-x}$

(d) $\lim\limits_{\substack{x\to 5 \\ <}} \dfrac{1}{(5-x)^2}$

(e) $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} \ln(x^2-1)$

(f) $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} \sqrt{\dfrac{-3}{(2-x)^5}}$

Composer une fonction

Exercice 12
Dans chaque cas, donner l'ensemble de définition et décrire à l'aide d'une formule les fonctions $u\circ v$ et $v\circ u$.

(a) $u : x\to e^x$ et $v : x\to x^2+2x+1$.

(b) $u : x\to \ln(x)$ et $v : x\to \dfrac{1}{x}$.

Exercice 13 (*)
Déterminer f et u tel que la fonction s'écrive $f(u)$ et déterminer sa dérivée :

(a) $g_1(x)=e^{x^2+3x+1}$

(b) $g_2(x)=\ln(x^2+1)$

Exercice 14 (**)
Soit une fonction Φ (Phi) telle que $\Phi'(x)=e^{-x^2/2}$. déterminer la dérivée de

(a) $g_1(x)=\Phi(3x+5)$

(b) $g_2(x)=\Phi(\sqrt{x})$

Déterminer la parité d'une fonction

Exercice 15
Déterminer la parité des fonctions suivantes.

(a) $f : x\to x\ln(x^2+1)$

(b) $g : x\to\sqrt{x^2+1}$

(c) $h : x\to e^{2x+5}$.

Exercice 16 (*)
Déterminer la parité des fonctions suivantes.

(a) $f : x\to |x|$

(b) $g : x\to \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^2\times\dfrac{x^3}{\sqrt{3x^2+5}}$

Exercice 17 (**)
Montrer que la fonction $f(x)=\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$ est impaire.

Déterminer un majorant ou un minorant

Exercice 18
Trouver si possible, un minimum et un maximum des fonctions suivantes sur D :

(a) $f : x\to\ln(x)$, $D=[1,5]$.

(b) $g : x\to x^2-1$, $D=[-3;4]$.

Exercice 19 (*)
Dans chaque cas, montrer que $\forall x\in I$, $|f'(x)|\leq M$ avec :

(a) $f : x\to x^2$, $\quad I=[-2;3]\quad$ et $\quad M=6$;

(b) $f : x\to e^{2x}-6x$, $\quad I=[0;\ln(2)]\quad$ et $\quad M=4$;

Exercice 20 (**)
Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On considère $f : x\to\ln(x)$. En déterminant l'intervalle I, montrer que $\forall x\in I$, $\dfrac{1}{k+1}\leq f'(x)\leq\dfrac{1}{k}$.

Résoudre des inéquations

Exercice 21
Résoudre les inégalités suivantes :

(a) $e^{2x+1} > e^x$.

(b) $x^2 > 5x - \dfrac{9}{4}$.

(c) $e^x \geq x$.

Exercice 22 (*)
Résoudre les inégalités suivantes :

(a) $\dfrac{1}{\ln(e^{-2x} + e^5)} \leq \dfrac{1}{5}$.

(b) $\dfrac{x+5}{x-1} > \dfrac{x+2}{x+1}$.

(c) $\ln(x) < \dfrac{x}{e}$.

Exercice 23 (**)
Montrer que :

(a) $\forall x \geq 0, \quad \sqrt{\dfrac{1}{x+3}} \leq \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{2x+1} \leq e^{(x+1)^2}$.

Étudier des fonctions

Exercice 24 (Étude complète d'une fonction)
Étudier la fonction définie par

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x-1}.$$

(a) Déterminer le domaine de définition D de f.

(b) La fonction f admet-elle une parité ? Si oui laquelle ?

(c) Déterminer les limites de f au bord de son domaine de définition.

(d) Déterminer la dérivée de f et son tableau de variation.

(e) Déterminer l'allure de la courbe.

Exercice 25 (*)
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

(a) Justifier que f est bien définie et sur $\mathbb{R}$.

(b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

(c) Représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$ en tenant compte des résultats des questions précédentes. La fonction est-elle paire ? Impaire ?

Exercice 26 (**)
Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 - e^{-x}.$$