

## Questions de cours

### Exercice 1 (Comparaison d'intégrales)

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx \leq \frac{1}{2(n+1)}.$$

### Exercice 2 (Inégalité de la moyenne)

On admet que la fonction  $f : x \rightarrow \frac{1}{e^x + e^{-x}}$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ .

Prouver que pour tout entier naturel  $n$ ,  $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$ , puis en déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente.

### Exercice 3 (Inégalité)

On considère la suite  $u_n = \int_1^n \frac{e^{-nx}}{x+1} dx$

- Tracer le tableau de variations de  $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{x+1}$  sur  $[1, 2]$ .
- En déduire que  $u_n \leq \frac{e^{-n}}{2}$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

### Exercice 4 (Intégration par partie)

Calculer les intégrales suivantes :

(a)  $\int_0^1 t e^t dt$

(b)  $\int_1^e t \ln(t) dt$

### Exercice 5 (Changement de variable)

Calculer l'intégrale  $\int_e^{e^2} \frac{1}{u} (\ln(u))^2 du$  par le changement de variable  $x = \ln(u)$ .

### Exercice 6 (Changement de variable)

Calculer les intégrales suivantes par changement de variables

(a)  $\int_0^1 t \sqrt{1-t^2} dt$  en posant  $u = 1-t^2$ .

(b)  $\int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}} dt$  en posant  $x = 1+e^t$ .

### Exercice 7 (Somme de Riemann)

Calculer la limite de  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$

## Étudier une suite définie par une intégrale

### Exercice 8

(a) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ .

(b) Calculer l'intégrale. Comment avait-on déjà obtenu cette inégalité ?

### Exercice 9

On considère la suite  $u$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

- Prouver que  $\forall x \in [0, 1], 0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$ .
- En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

### Exercice 10 (\*)

Étudier la monotonie des suites de terme général suivant :

(a)  $a_n = \int_0^1 x^2 e^{nx^3} dx$ .

(b)  $b_n = \int_0^n e^{-t^2} dt$ .

**Exercice 11 (\*\*)**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(1 + xe^{-x})$ . On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ . On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal.

- Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif. On pose  $A(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)dx$ . On se propose de majorer  $A(\lambda)$  à l'aide de deux méthodes différentes.
  - Justifier que, pour tout nombre réel  $\lambda$  strictement positif,  $A(\lambda) \leq \lambda f(1)$ .
  - Calculer à l'aide d'une intégration par parties  $\int_0^\lambda xe^{-x}dx$  en fonction de  $\lambda$ .
  - On admet que pour tout nombre réel positif  $u$ ;  $\ln(1 + u) \leq u$ . Démontrer alors que, pour tout nombre réel  $\lambda$  strictement positif, on a  $A(\lambda) \leq -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$ .

 Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties


**Exercice 12**

Calculer les intégrales suivantes :  $\int_1^e \ln(t)dt$  et  $\int_0^{-2} t^2 e^{5t} dt$ .

**Exercice 13 (\*)**

On pose,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$ .

- Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
- Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
- Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$ .
- Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ . En déduire la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

 Calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variable.

**Exercice 14**

Calculer les intégrales suivantes par changement de variables

- $\int_e^{e^2} \frac{1}{t(\ln t)^3} dt$  en posant  $x = \ln t$
- $\int_0^1 \frac{dt}{2t+1}$

**Exercice 15 (\*\*)**

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+2}} dt \quad J = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} dt \quad K = \int_0^1 \sqrt{t^2+2} dt \quad L = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}} dt$$

- Justifier l'existence de ces intégrales, et calculer  $L$ .
- Montrer que  $J + 2I = K$ . (En 3 lignes et sans calculs)
- Montrer par intégration par parties que  $K = \sqrt{3} - J$
- Montrer à l'aide du changement de variable  $x = t + \sqrt{t^2+2}$  que  $I = \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})$ .
- Déduire des questions précédentes les valeurs de  $J$  et  $K$ .

 Reconnaître une somme de Riemann et calculer sa limite.

**Exercice 16 (\* - \*\*)**

Montrer que les suites suivantes sont convergentes, et trouver leur limite.

- $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n^{3/2}}$
- $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$
- $w_n = \left( \prod_{k=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}}$ .