

Questions de cours

Exercice 1 (Combinaison linéaire)

Dans chaque cas dire si x est combinaison linéaire des vecteurs u_i

$$(a) \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Famille libre)

Déterminer si les familles de vecteurs u_i suivantes sont libres

$$(a) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Famille génératrice)

Déterminer si les familles de vecteurs u_i suivantes sont génératrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$(a) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (Base)

Parmi les familles de l'exercice 2 et 3. Lesquelles sont des bases ?

Exercice 5 (Base canonique)

(a) Donner les coordonnées du vecteur $v = -2e_2 + 4e_1 - e_3$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

(b) Soit $u = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Décomposer u dans la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 6 (SEV)

Montrer que les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$(a) \quad F = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad (b) \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \qquad (c) \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x + y - z = 0 \right\}$$

Exercice 7

Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ avec } x + y = 1 \right\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

Montrer que $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ avec } x^2 + y = 0 \right\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

Exercice 8

Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} 2a - b \\ a + b \\ a - c \end{pmatrix}, \text{ avec } a, b, c \text{ des réels} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Exercice 9 (Sous espace vectoriel engendré)

On rappelle que les solutions des systèmes linéaire homogènes sont des sous espaces vectoriel. Résoudre le système

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x + y + z = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ x + y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases} \text{ en fonction de } \lambda \text{ et donner les ensembles solutions à l'aide de la notation } \mathit{vect}.$$

Montrer qu'un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire d'autres vecteurs

Exercice 10 (Combinaison linéaire)

Dans chaque cas dire si x est combinaison linéaire des vecteurs u_i

$$(a) \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 (*)

On pose les vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que les vecteurs $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs e_1 et e_2 .

(b) Qu'en est-il du vecteur $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$? La famille (e_1, e_2) est-elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

Exercice 12 ()**

Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose pour tout réel k : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ k \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs du réel k pour que le vecteur

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_2 .

Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel

Exercice 13 (Sous espaces vectoriels)

(a) Les ensembles suivants sont ils des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

$$(i) \quad F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \qquad (ii) \quad F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x + 2y = 0 \right\}$$

(b) Les ensembles suivants sont ils des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

$$(i) \quad F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \qquad (ii) \quad F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x + y + 3z = 1 \right\}$$

Exercice 14 (*)

(a) Montrer que l'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$ est un sev de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$ est un Espace vectoriel (sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Exercice 15 ()**

L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, $\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel muni de la loi $+$ et \times (les polynômes sont alors des vecteurs). La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est alors $(1, X, X^2, X^3)$.

(a) Montrer que l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/P(0) = P'(0) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) Montrer que la famille $Q_i = (X - 1)^i$ pour $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(c) Soit $R = 2X^3 + 3X - 4$ Donnez les coordonnées de R dans la base canonique puis dans la base (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) .

(d) Trouver une base pour le SEV F .

Feuille Trouver une famille libre, génératrice ou une base d'un sous espace vectoriel

Exercice 16

Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ Puis déterminer les

coordonnées du vecteur $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 17 (*)

Déterminer si les familles de vecteurs (u_i) suivantes sont des familles libres, des familles génératrices, des bases de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$(a) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18 ()**

On considère l'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, 2x + y - 3z = 0, x - y + 2z = 0 \right\} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- Trouver une famille génératrice de F .
- Déterminer une base de F .

Feuille Exprimer et simplifier un espace vectoriel sous la forme d'un Vect

Exercice 19

On considère le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivant :

$$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

- Trouver une famille génératrice de F constitué de deux vecteurs.
- En déduire l'expression explicite d'un élément quelconque de F en fonction de deux paramètres réels, puis déterminer un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui n'appartient pas à F .

Exercice 20 (*)

On rappelle que les solutions des systèmes linéaire homogènes sont des sous espaces vectoriel. Résoudre le système

$$\begin{cases} (3 - \lambda)x - y = 0 \\ 9x + (-3 - \lambda)y = 0 \\ (4 - \lambda)z = 0 \end{cases} \quad \text{en fonction de } \lambda \text{ et donner les ensembles solutions à l'aide de la notation } \text{vect}.$$

Exercice 21 ()**

On considère les vecteurs $u = (-4; 4; 3)$, $v = (-3; 2; 1)$, $s = (-1; 2; 2)$ et $t = (-1; 6; 7)$ de \mathbb{R}^3 . Montrer que

$$\text{Vect}(u; v) = \text{Vect}(s; t).$$