

## Questions de cours

### Exercice 1 (Évènements)

On effectue une infinité de lancers d'une pièce truquée où  $p$  est la probabilité d'obtenir pile. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $P_k$  l'évènement "On obtient pile au  $k^{\text{ième}}$  lancer". Exprimer les évènements suivants en fonction des  $P_k$  :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_n$  : "Obtenir que des piles durant les  $n$  premiers lancers."
- $A$  : "N'avoir que des piles"
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B_n$  : "Obtenir au moins un pile pendant les  $n$  premiers lancers".
- $B$  : "Obtenir au moins un pile".

### Exercice 2

Émilie est une excellente footballeuse. La probabilité qu'elle marque un but lorsqu'elle tire un pénalty est égale à  $2/3$ . Pauline est un peu moins forte. La probabilité qu'elle marque un but lorsqu'elle tire un pénalty est égale à  $1/2$ . Émilie lance un dé à Pauline. Chacune va tirer un pénalty à son tour, en commençant par Pauline. La première qui marque a gagné. Quelle est la probabilité qu'Émilie gagne? (On notera  $A_n$  l'évènement : Émilie et Pauline ratent leurs  $n - 1$  premiers tirs, Pauline rate son  $n$ -ième tir, et Émilie réussit son  $n$ -ième tir)

### Exercice 3 (Courriers)

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal. 10 lettres sont envoyés et on note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de lettres affranchies au tarif urgent.

- Quelle est la loi de probabilité de  $X$ , son espérance et sa variance?
- Quelle est la probabilité de l'évènement  $A$  : "Au moins une lettre est au tarif urgent"?

### Exercice 4 (Utilisation de la limite monotone)

Reprendre l'exercice 1 et calculer les probabilités des évènements  $A_n$ ,  $A$ ,  $B_n$  et  $B$ .

### Exercice 5

Une urne contient 2 boules blanches et 1 boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne en remettant la boule après tirage après avoir noté sa couleur, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule rouge. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule rouge est 1.

### Exercice 6 (Évènement vrai presque sûrement)

Un sujet de DS contient des erreurs. A chaque lecture, toute erreur est corrigée avec une probabilité  $\frac{1}{3}$ , les différentes erreurs sont corrigées indépendamment les unes des autres.

- Calculer la probabilité  $P(E_n)$  qu'une erreur soit corrigée exactement au bout de  $n$  relectures, puis la probabilité  $P(E'_n)$  qu'elle le soit au bout d'au plus  $n$  lectures. Montrer que l'erreur est presque sûrement corrigée.

### Exercice 7 (Formule des probabilités composées)

Dans une urne, il y a une boule blanche et une boule rouge. A chaque fois que l'on tire une boule blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne. On note  $A_n$  la probabilité de tirer une boule blanche au  $n^{\text{ième}}$  tirage.

- Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au  $n^{\text{ième}}$  tirage sachant que l'on a tiré que des boules blanches auparavant?
- Quelles est la probabilité de ne tirer que des boules blanches sur  $n$  tirages?
- En déduire que l'évènement "on tire au moins une boule rouge" est vrai presque sûrement.


### Exercice 8 (Formule des probabilités totales)

. On considère le jeu suivant. On lance un dé à 6 face jusqu'à obtenir 6 et on note  $n$  le nombre de lancer qu'il a fallu faire pour obtenir le 6. On met alors dans une urne  $n - 1$  boules blanches et 1 boule noire. On s'intéresse à la probabilité de tirer la boule noire. On note les évènements  $A_n$  : " On obtient le premier 6 au  $n$ -ième tirage", et  $N$  : "On tire la boule noire".

- Pour tout entier  $n$ , calculer les probabilités des évènements  $A_n$ .
- Quelle est la probabilité de tirer la boule noire sachant que l'on a obtenu le premier 6 au  $n$ -ième tirage?
- En déduire la probabilité de tirer la boule noire.

### Exercice 9 (Indépendance)

On lance un dé deux fois de suite. On note  $N_1$  l'évènement "le premier nombre est pair",  $N_2$  "le deuxième nombre est pair et  $S$ , "la somme des deux nombres est paire". Montrer que les évènements  $N_1$ ,  $N_2$  et  $S$  sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.

 *Modéliser un problème de probabilité*

**Exercice 10**

Vous choisissez un nombre entre 1 et 100 et jouez contre un ordinateur. L'ordinateur tire un nombre aléatoire entre 1 et 100 jusqu'à découvrir votre nombre. On note les évènements

$$\begin{aligned} A_n &= \{ \text{Au tirage } n^{\text{o}}, \text{ L'ordinateur donne la bonne réponse} \} \\ G_n &= \{ \text{L'ordinateur gagne la partie au } n\text{-ième tirage} \} \\ G &= \{ \text{L'ordinateur gagne} \} \end{aligned}$$

Écrire  $G_n$  en fonction des évènements  $A_n$  et  $\bar{A}_n$  puis exprimer  $G$  en fonction des évènements  $G_n$ .

**Exercice 11 (\*)**

Emma et Pauline lancent le même dé à tour de rôle (Emma commence). Le gagnant est le premier à obtenir 6. On s'intéresse aux trois évènements

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{victoire de Pauline} \} \\ B &= \{ \text{victoire d'Emma} \} \\ C &= \{ \text{il n'y a pas de vainqueur} \} \end{aligned}$$

On introduit également les évènements suivants :

$$\begin{aligned} F_n &= \{ \text{fin de la partie au } n\text{-ième lancer} \} \\ S_n &= \{ \text{le } n\text{-ième lancer donne un 6} \} \\ F &= \{ \text{La partie se termine} \} \end{aligned}$$


- Traduire les évènements  $A$ ,  $B$  et  $C$  avec les évènements  $F_n$ .
- Traduire l'évènement  $F_n$  en fonction des évènements  $S_n$ .
- Comment traduire l'évènement  $F$  ?

**Exercice 12 (\*\*)**

Luke et Han jouent chacun avec deux dés équilibrés. Luke gagnera s'il obtient un total de 6. Han gagne en amenant un total de 5. Han joue le premier et ensuite (s'il y a une suite), Luke et Han jouent alternativement. On note

$$\begin{aligned} S_n &= \{ \text{Obtenir un 6 en lançant deux dés au } n\text{-ième lancer} \} \\ C_n &= \{ \text{Obtenir un 5 en lançant deux dés au } n\text{-ième lancer} \} \\ L_n &= \{ \text{Luke gagne à son } n\text{-ième lancer} \} \\ H_n &= \{ \text{Han gagne à son } n\text{-ième lancer} \} \\ L &= \{ \text{Luke a gagné} \} \\ H &= \{ \text{Han a gagné} \} \end{aligned}$$

- Écrire les évènements  $L_n$  et  $H_n$  en fonction de  $C_n$  et  $S_n$ .
- Écrire les évènements  $L$  et  $H$  en fonction des évènements  $L_n$  et  $H_n$ .

 *Calculer la probabilité d'une union ou d'une intersection infinie*

**Exercice 13**

On lance un dé jusqu'à ce que l'on obtienne un 6.

- Quelle est la probabilité d'obtenir le premier 6 au  $n^{\text{ième}}$  lancer ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

**Exercice 14**

Calculer les probabilités de chaque évènement considérés dans l'exercice 10.

**Exercice 15 (\*)**

Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne que l'on remet après avoir noté la couleur, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule noire. On considère les évènements suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{On effectue un nombre fini de tirages} \} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, F_n &= \{ \text{Le jeu s'arrête au } n\text{-ième tirage} \} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, B_n &= \{ \text{On tire une boule blanche au } n\text{-ième tirage} \} \end{aligned}$$

- Démontrer que les évènements  $F_n$  sont deux à deux incompatibles.

(b) Exprimer l'évènement  $F_n$  en fonction des évènements  $B_i$  ( $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ).

(c) Exprimer  $A$  en fonction des évènements  $F_n$  et déterminer  $P(A)$ .

### Exercice 16 (\*)

Calculer les probabilités de chaque évènement considérés dans l'exercice 11.

### Exercice 17 (\*\*)

Calculer les probabilités de chaque évènement considérés dans l'exercice 12.

 Déterminer des lois de probabilités.

### Exercice 18 (\*)

On considère le système complet d'évènement  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p(A_n) = \lambda \frac{2^n}{n!}$ . Déterminer la valeur de  $\lambda$  ?

### Exercice 19 (\*\*)

On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir  $n$  vaut  $1/2^n$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_k$  l'évènement " $n$  est un multiple de  $k$ ".

(a) Vérifier que ceci définit une probabilité sur  $\mathbb{N}^*$ .

(b) Calculer la probabilité de  $A_k$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .

(c) Calculer la probabilité de  $A_2 \cup A_3$ .

 Appliquer la formule des probabilité totales.

### Exercice 20 ()

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardiovasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour  $J_n$ , alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant  $J_{n+1}$  est 0,3 ; mais si elle a fumé un jour  $J_n$ , alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant  $J_{n+1}$  est 0,9 ; On note  $p_n$  la probabilité que cette personne fume au jour  $J_n$ .

(a) Que vaut  $p_0$  ?

(b) Calculer  $p_1$  et  $p_2$ .

(c) Exprimer  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ . En déduire la valeur de  $p_n$  en fonction de  $n$  ?

(d) Cette personne va-t-elle finir par arrêter de fumer ?

### Exercice 21 (\*)

On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A,B,C d'un triangle selon le procédé suivant :

— si la particule se trouve en B, elle y reste.

— si la particule se trouve en A, elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.

— si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, et elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.

— à la première seconde, elle se pose au hasard sur l'un des trois sommets.

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $A_n$  (resp.  $B_n, C_n$ ) l'évènement : " $A$  la  $n^{\text{ième}}$  seconde, la particule se trouve en A (resp. B,C)". On note  $a_n, b_n, c_n$  les probabilités des événements  $A_n, B_n, C_n$ .

(a) Que valent  $a_1, b_1, c_1$  ?

(b) Donner une relation de récurrence entre  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$  et  $a_n, b_n, c_n$ .

(c) Montrer que  $(c_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et que pour tout  $n \geq 1$

$$c_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}$$

En déduire  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .

(d) Étudier la convergence des suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$ . Interpréter.

**Exercice 22 (\*\*)**

On dispose de deux pièces identiques d'apparence, la pièce A donnant Pile avec une probabilité  $a$  et la pièce B donnant Pile avec une probabilité  $b$ . Pour le premier lancer du jeu, on choisit une pièce au hasard et pour les coups suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient Pile, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce pour le lancer suivant. On note, pour tout  $k \geq 1$ ,  $A_k$  l'événement "le  $k^{\text{ième}}$  lancer se fait avec la pièce A",  $B_k = \overline{A_k}$  et  $E_k$  l'événement "le  $k^{\text{ième}}$  lancer amène Pile".

- Trouver une relation entre  $P(E_k)$  et  $P(A_k)$ .
- Trouver une relation entre  $P(A_{k+1})$  et  $P(A_k)$ . En déduire  $P(A_k)$  et  $P(E_k)$ .

**Exercice 23 (\*\*)**

Un jeu consiste à déplacer un jeton autour des sommets d'un carré AGBP à l'aide d'un dé. A chaque tour, le joueur lance le dé et déplace le jeton du nombre de sommets donné par le dé et dans le sens des aiguilles d'une montre. Le joueur joue jusqu'à tomber sur G, il a alors gagné, ou jusqu'à tomber sur P, il a alors perdu. Le joueur  $J$  choisit de partir du sommet A et le joueur  $J'$  du sommet B. Considérons les événements :  $V$  : " $J$  gagne" ;  $V'$  : " $J'$  gagne" ;  $B_1$  (resp.  $B'_1$ ) : " $J$  (resp.  $J'$ ) va en B à l'issue du premier lancer".

- A l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que

$$P(V) = \frac{2}{5}(1 + P_{B_1}(V)).$$

- Démontrer de même que  $P(V') = \frac{1}{5}(1 + 2P(V))$ . En déduire alors  $P(V)$  et  $P(V')$ .