

## Questions de cours

### Exercice 1 (Primitives (1))

Donner les primitives des fonctions suivantes :

(a)  $x \rightarrow x^4$

(b)  $x \rightarrow \frac{1}{x\sqrt{x}}$

(c)  $x \rightarrow x^{-1}$

### Exercice 2 (Primitives (2))

Donner les primitives des fonctions suivantes :

(a)  $x \rightarrow x^2(x^3 + 1)^4$

(c)  $x \rightarrow \frac{x}{x^2+3}$

(e)  $x \rightarrow \frac{\ln(x)}{x}$

(b)  $x \rightarrow x \exp(x^2)$

(d)  $x \rightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

(f)  $x \rightarrow \frac{1}{x \ln(x)}$

### Exercice 3 (Somme de primitive)

Donner une primitive de  $x \rightarrow x - 3x^2 + e^x$ .

### Exercice 4 (Premières intégrales)

Donner la valeur des intégrales suivantes :

(a)  $\int_1^2 x dx$

(b)  $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$

(c)  $\int_0^2 x e^{x^2} dx$

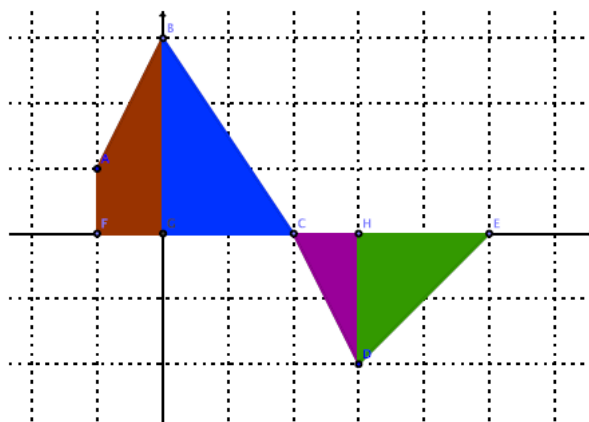
(d)  $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx$

### Exercice 5 (Aire sous la courbe)

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation  $\frac{1}{x}$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équation  $x = 1/2$  et  $x = 4$ .

### Exercice 6 (Relation de Chasles)

Soit  $f$  la fonction donnée ci-dessous. Déterminer  $\int_{-1}^5 f(t) dt$ .



### Exercice 7

intégrale et parité Calculer les intégrales suivantes :

(a)  $\int_{-5}^5 x^3 - x dx$

(b)  $\int_{-2}^2 x^2 + 3 dx$

### Exercice 8 (Linéarité de l'intégrale)

(a) Calculer  $\int_{-1}^1 P(x) dx$  avec  $P(x) = x^3 - x^2 + 2$

(b) Calculer  $\int_1^2 (2x + \frac{5}{x}) dx$

### Exercice 9 (Fonction définie par une intégrale)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f : x \rightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et montrer que  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

*Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive*

**Exercice 10**

Donner les primitives de chacune des fonctions suivantes :

(a)  $t \rightarrow t^3 - 3t$

(b)  $t \rightarrow 2t(t^2 + 4)^3$

(c)  $t \rightarrow \frac{2t + 3}{(t^2 + 3t + 3)^3}$

**Exercice 11 (\*)**

(a) Montrer que la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $F(x) = x \ln x - x$  est une primitive de la fonction logarithme.

(b) En déduire la valeur de l'intégrale  $\int_1^e \ln(x) dx$ .

**Exercice 12 (\*\*)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -3; 2[$  par

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 25}{x^2 + x - 6}.$$

(a) Montrer qu'on peut écrire  $f$  sous la forme  $f(x) = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}$ .

(b) Déterminer  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

*Calculer une intégrale en utilisant la linéarité ou la relation de Chasles.*

**Exercice 13 (\*)**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$  et  $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ .

(a) Calculer  $I_0$ .

(b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], 0 \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$ .

(c) Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et en déduire que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

(d) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

(e) Calculer  $I_n + J_n$ . En déduire la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 14 (\*\*)**

Calculer de deux façons différentes la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} e^t dt.$$

*Étudier une intégrale fonction de sa borne supérieur.*

**Exercice 15**

On définit la fonction  $F$  par :

$$F(x) = \int_1^x \ln(t) dt$$

(a) Donner l'ensemble de définition de  $F$ .

(b) Étudier le signe de la fonction  $F$  sur son ensemble de définition.

(c) Montrer qu'elle est  $\mathcal{C}^1$ , expliciter sa dérivée puis étudier ses variations.

**Exercice 16 (\*)**

On définit la fonction  $G$  par  $G(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{dt}{t^2 - t}$ .

(a) Donner l'ensemble de définition.

(b) Étudier le signe de la fonction sur son ensemble de définition.

(c) Montrer qu'elle est  $\mathcal{C}^1$ , expliciter sa dérivée puis étudier ses variations.

**Exercice 17 (\*\*)**

On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_1^x \frac{t-1}{e^t+1} dt$ .

- Étudier les variations de  $F$ .
- Prouver que :  $\forall t \in [1; +\infty[, \frac{t-1}{e^t+1} \leq te^{-t}$ .
- En déduire que la fonction  $F$  est majorée sur  $[1; +\infty[$ . Que peut-on en déduire quant à la limite de  $F$  en  $+\infty$ ?
- Prouver que :  $\forall t \in ]-\infty; 1], \frac{t-1}{e^t+1} \leq \frac{t-1}{e+1}$ . En déduire la limite de  $F$  en  $-\infty$ .

 Étudier une intégrale dont les bornes sont des fonctions.

**Exercice 18 (\*)**

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ , par  $h(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$

- Justifier que  $h$  est bien définie, puis donner son signe.
- Montrer que  $h$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que pour tout  $x > 0$

$$h'(x) = \frac{2e^{-x^4} - e^{-x^2}}{x}$$

**Exercice 19 (ESCP 89 - \*\*)**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ .

- Justifier que  $g$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .
- Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- Justifier que  $g$  est de classe  $C^1$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$ .
- Donner le sens de variation de  $g$ . On précisera  $g(0)$ .
- Montrer :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad xe^{-4x^2} \leq g(x) \leq xe^{-x^2}$$

En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .