

Questions de cours

Exercice 1

Dans les trois cas suivants :

$$a_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}, \quad c_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

- (a) Exprimez a_n , b_n et c_n en fonction de n (calculez les sommes)
 (b) Donnez les limites des suites a_n , b_n et c_n .

Exercice 2

Étudier la convergence des séries de terme général n et e^{-n} .

Exercice 3

On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = S_n + \frac{1}{n}$. Montrer que les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et (v_n) sont adjacentes. En déduire que la série de terme générale $\frac{1}{n^2}$ est convergente.

Exercice 4

- (a) Étudier la convergence de la série réelle de terme général $\left(\frac{1}{10}\right)^n$.
 (b) (i) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
 (ii) En déduire la limite de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et la nature de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.

Exercice 5

La série de terme général $u_n = \frac{1}{2^n} + \ln\left(\frac{(n+1)}{n}\right)$, ($n \geq 1$) converge-t-elle? Si oui calculer sa somme.

Exercice 6

- (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
 (b) En déduire alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge vers 1.
 (c) Peut-on dire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$? Pourquoi? Conclure.

Exercice 7 (série géométrique)

La série $\sum \frac{1}{3^n} \times (2^{n+1} + 1)$ converge-t-elle? Si oui que vaut sa somme?

Exercice 8 (série géométrique "dérivée")

Justifier que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes

- (a) $\sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (c) $\sum_{n \geq 1} \frac{n2^n}{3^{n+1}}$
 (b) $\sum_{n \geq 1} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ (d) $\sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)2^{n+1}}{5^n}$

Exercice 9 (Série exponentielle)

Étudier la nature et déterminer la somme éventuelle des séries $\sum_{n \geq 0} \frac{\ln(3)^n}{n!}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{3^{n-2}}{n!}$

Exercice 10

Soit u la suite définie par $u_0 \in]0; 1[$ et pour tout n , $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

- (a) Démontrer que pour tout n , $0 < u_n < 1$. Montrer alors que la suite u converge, et déterminer sa limite.
 (b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge et calculer sa somme.

Exercice 11 (Somme partielle majorée)

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \frac{u_n}{3}$.

- (a) Vérifier par récurrence que $\forall n \geq 0, u_n \leq u_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
- (b) En déduire que la série de terme général (u_n) est convergente.

Exercice 12 (Théorème de comparaison)

(a) Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2(n^2 + 1)}$ est convergente.

(b) Montrer que : $\forall x \geq 1, \ln(x) \leq x$. En déduire que la série de terme général $v_n = \frac{1}{\ln(n)}$ est divergente.

Exercice 13 (Convergence absolue)

Montrer que la série de terme général $w_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente.

Étude de convergence en passant par les sommes partielles

Exercice 14 (*)

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme (pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{R}$) :

(a) $a = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$.

(c) $c = \sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{(n+1)!}$.

(e) $e = \sum_{n \geq 0} \frac{1+2^n}{4^{n+1}}$.

(b) $b = \sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n!}$.

(d) $d = \sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{2^{2n+1}}$.

(f) $f = \sum_{n \geq k} \frac{\binom{n}{k}}{n!}$.

Exercice 15 (*)

Considérons la suite :

$$u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

- (a) Écrire (u_n) sous la forme $a_{n+1} - a_n$ pour tout $n \geq \mathbb{N}$. En déduire que la série de terme général u_n converge et donner sa valeur.
- (b) Reprendre la question précédente avec

$$v_n = \ln \left(\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)} \right).$$

Séries géométriques ou exponentielles

Exercice 16 (Convergences de séries)

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme (pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{R}$) :

(a) $a = \sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)}{6^n}$.

(b) $b = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2^n}$.

(c) $c = \sum_{n \geq 2} n(-1)^n x^{n-2}$.

Exercice 17 (*)

(a) Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Montrer que les séries suivantes convergent et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} = 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1} = \frac{1}{p}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 pq^{n-1} = \frac{q+1}{p^2}.$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que les séries suivantes convergent et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n \lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 \lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda(\lambda + 1).$$

Comparaison de séries

Exercice 18 (Série divergente)

Soit u la suite définie pour tout $n \geq 2$ par

$$u_n = \frac{n}{n^2 - 1}.$$

Montrer pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq \frac{1}{n}$. Montrer alors que $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

Exercice 19

Quelle est la nature de la série de terme général définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $u_n = \frac{5}{4^n \ln n}$.

Exercice 20 (*)

(a) Démontrer les inégalités suivantes

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x,$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq \ln(x)$

(b) En déduire la nature des séries suivantes :

(i) $\sum_{n \geq 0} e^{-n^2},$

(ii) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n)}.$

Exercice 21 (*)

(a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_2^n \frac{1}{x \ln(x)} dx.$

(b) Montrer que $\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln x} \leq \frac{1}{k \ln k}.$

(c) En déduire une minoration de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$. Déterminer la nature de cette série.

Exercice 22 (**)

Pour tout n , on note

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Exercice 23 (***)

On suppose que la série de terme général u_n est convergente. On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$,

$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ Montrer que R_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.