Questions de cours

Exercice 1 (Dérivée en un point)
Montrer que la fonction $g : x \to \sqrt{x}$ est dérivable en 1 mais n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2 (Dérivée à droite et à gauche)
Montrer que la fonction valeur absolue est dérivable à gauche et à droite en 0. Est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 3 (Dérivabilité en un point)

(a) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} e^x, x < 0 \\ x+1, x \geq 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.

(b) La fonction $g(x) = \begin{cases} \ln(x+1), x \geq 0 \\ x^2, x < 0 \end{cases}$ est-elle dérivable ou continue en 0 ?

Exercice 4 (Équation de la tangente)
Déterminer les équations des tangentes en 0 puis en x_0 pour les fonctions $x \to x^2$ et $x \to e^x$.

Exercice 5 (Demi-tangente)
On considère la fonction $f : x \to x^2 + |x-1|$.

(a) Calculer $f'_d(1)$ et $f'_g(1)$. f est-elle dérivable en 1 ?

(b) Donner les équations des demies-tangentes à droite et à gauche en 1.

Exercice 6 (Point de rebroussement)
On considère la fonction $f \ : \ x \longmapsto \sqrt{|x-1|}$

(a) Déterminer D_f.

(b) Montrer que f admet des demies tangentes verticales à gauche et à droite en 1.

Exercice 7 (Développement limité à l'ordre 1)
Donner le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :
$x \longmapsto e^x$, $x \to \ln(1+x)$ et $x \to (1+x)^\alpha$ avec $\alpha > 0$.

Exercice 8 (Fonctions dérivables)
Préciser sur quel(s) ensemble(s) les fonctions suivantes sont dérivables puis calculer leurs dérivées :

(a) $f : x \to (2x+3)^3$

(b) $g : x \to \dfrac{1}{(2x+3)^3}$

(c) $h : x \to \ln(x^2-1)$

(d) $k : x \to x^x$

Exercice 9
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\ln(x)$.

(a) Étudier les variations de f.

(b) Montrer que f est bijective de $[1/e, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.

(c) En quels points f^{-1} est-elle dérivable ?

(d) Calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 10 (Sens de variations)
Montrer que la fonction $f : x \to e^x + \ln(x)$ est strictement croissante sur son ensemble de définition. En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x) = 0$.

Exercice 11 (Inégalité des accroissements finis)
Soit $f(t) = \ln(1+t)$. Soit $x \geq 0$.

(a) Montrer que $\forall t \in [0,x]$, $\frac{1}{1+x} \leq f'(t) \leq 1$.

(b) En déduire que $\forall x \geq 0$, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

(c) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Exercice 12
Montrer que , $\forall x \in [0; +\infty[$, $\left|\sqrt{2x+6} - \sqrt{8}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{6}}|x-1|$

Calculer la dérivée d'une fonction en un point

Exercice 13
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \\ \qquad\qquad f(0) = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de cette fonction en 0 puis donner le ou les équations des éventuelles tangentes en 0 à la courbe.

Exercice 14 (*)
Étudier la dérivabilité de la fonction f définie par $\forall x \geq 1,\ f(x) = \sqrt{x^2-1}$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Calculer la dérivée d'une fonction sur un intervalle

Exercice 15
Préciser sur quel(s) ensemble(s) les fonctions suivantes sont dérivables puis calculer leurs dérivées :

(a) $f : x \to (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$

(b) $g : x \to e^{x^3+5x}$

(c) $h : x \to \sqrt{x^5 - 3x^3}$

(d) $k : x \to \dfrac{1}{\ln(x)}$

Exercice 16 (*)
Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes. Déterminer leur fonction dérivée.

(a) $x \mapsto \sqrt{1-4x^2}$

(b) $x \mapsto x|x|$

(c) $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^3)}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 17 (**)
Soit f la fonction définie par $f(x) = x \ln x$.

(a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f. Déterminer sa fonction dérivée.
(b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
(c) La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?

Étude de fonctions, interprétation graphique.

Exercice 18 (* - EML 1994)
On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$$

(a) Dresser le tableau de variations de f.
(b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
(c) Tracer la courbe représentative de f

Exercice 19 (**)
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.
On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

(a) Déterminer $\mathcal{D}_f$.
(b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$ et déterminer f'.
(c) Étudier les variations de f. Déterminer les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine de définition.
(d) On appelle point d'inflexion le point où la dérivée de f change de sens de variation. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion.
(e) Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en ce point. (Graphiquement, la courbe traverse sa tangente en un point d'inflexion).
(f) Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé, ainsi que sa tangente T.

Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 20
Justifier que $\forall x \in [0,1],\ |e^x - 1| \leq ex$ (en utilisant l'inégalité des accroissements finis).

Exercice 21 (*)
Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} = f(u_n)$.

(a) Montrer que $\forall x \in [0;2]$ on a $f(x) \in [0;2]$. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;2]$

(b) Montrer que $\forall x \in [0;2]$, $|f\,'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(c) Montrer avec l'inégalité des accroissements finis que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - 2|$

(d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$. Quelle est donc la nature de (u_n) ? Sa limite éventuelle ?

Exercice 22 (**)

(a) Démontrer que pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

(b) Redémontrer que la suite $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.

(c) Soit $(v_n)_n$ la suite définie pour $n \geq 1$ par la relation $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$

- (i) Montrer que $v_n \geq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0$
- (ii) Montrer que $(v_n)_n$ converge. La limite de $(v_n)_n$ est appelée la constante d'Euler.

Exercice 23 (**)
On souhaite déterminer le nombre de solutions de $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$ ainsi que la valeur approchée d'une des racines.

(a) Montrer que (E) admet 3 solutions réelles α, β et γ telles que $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$.

(b) On veut obtenir une approximation de β. On introduit $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{3}$ et la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

- (i) Justifier que $\beta \in [0, 1/2]$ et montrer que β est solution de l'équation $g(x) = x$.
- (ii) Montrer que $[0, 1/2]$ est stable par g et que $\forall x \in [0, 1/2]$, $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.
- (iii) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1/2]$.
- (iv) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \beta|$ puis que $|u_n - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4^n} \times \dfrac{1}{2}$.
- (v) Pour quelles valeurs de n a-t-on $|u_n - \beta| \leqslant 10^{-9}$?
- (vi) Écrire un programme Scilab qui renvoie une valeur approchée de β à 10^{-9} près.

Manipuler les développements limités d'ordre 1.

Exercice 24 ()
Déterminer le développement limité de la fonction $f : x \to e^{1-x}$ en $x = 1$. En déduire la tangente à f en $x = 1$

Exercice 25 (*)
On considère la fonction $f : x \to \dfrac{\ln(2-\sqrt{1+x})}{x}$.

(a) Déterminer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 1 de la fonction $x \to \ln(2-\sqrt{1+x})$.

(b) En déduire la limite en 0 de la fonction f.

Exercice 26 (**)
Soit f une fonction dérivable en a. Le but de l'exercice est de déterminer :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(a+3h))^2 - (f(a-h))^2}{h}.$$

(a) On considère la fonction $h : x \to f(a+x)$. Montrer que la fonction h est dérivable en 0.

(b) Écrire le développement limité à l'ordre 1 de la fonction h en 0.(on utilisera l'écriture avec la fonction $\varepsilon(\cdot)$)

(c) En déduire une écriture de $(f(a+x))^2$ pour x au voisinage de 0.

(d) Démontrer que : $(f(a+x))^2 = (f(a))^2 + 2xf(a)f'(a) + \varepsilon(x)$.Conclure.