

## Questions de cours

### Exercice 1 (Limites de suites)

Étudier les limites des suites définies par

$$(a) \forall n \geq 1, u_n = \frac{1}{n} \qquad (b) \forall n \geq 0, v_n = \frac{n+1}{n+2} \qquad (c) w_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

### Exercice 2 (Nature des suites)

Étudier la nature des suites définies par :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \qquad (c) \forall n \in \mathbb{N}, w_n = -2n + 3$$

$$(b) \begin{cases} v_0 = -5 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad (d) \forall n \geq 2, t_n = \frac{n}{\ln n}$$

### Exercice 3 (Limite et inégalités)

On considère la suite définie par  $u_1 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$ .

- (a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq n$ .  
 (b) En déduire la nature de la suite  $(u_n)_n$ .

### Exercice 4 (Théorème des gendarmes)

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $u_0 = 2$  et la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$$

- (a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$   
 (b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

### Exercice 5 (Suite monotone)

Soit  $u$  la suite définie par  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$  et  $u_0 = 1$ .

- (a) Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est bien définie et strictement positive.  
 (b) Montrer alors que la suite  $(u_n)_n$  est décroissante.  
 (c) En déduire que la suite est convergente.

### Exercice 6 (Autres suites usuelles)

Étudier la nature des suites définies par :

$$\begin{cases} w_0 = 3 \\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases}, \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}, \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_1 = -1 \\ v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n \end{cases}$$

### Exercice 7 (Suites adjacentes)

Montrer que les suites  $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ ,  $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$  sont adjacentes.

### Exercice 8 (Suites récurrentes)

Soit  $f(x) = 0,75x^2 + 0,25$  une fonction définie sur  $[0, 1]$  et soit  $(u_n)_n$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- (a) Tracer le tableau de variations complet de  $f$ .  
 (b) En déduire par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1/3]$ .  
 (c) Montrer par récurrence que la suite  $(u_n)_n$  est croissante.  
 (d) En déduire que  $(u_n)_n$  converge. Déterminer sa limite  $\ell$ .

*Calculer la limite d'une suite explicite*

**Exercice 9**

Déterminer les limites des suites suivantes.

(a)  $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n.$

(b)  $b_n = \frac{n^3 - n^2 + 2n}{n^2 + 1}.$

**Exercice 10 (\*)**

Déterminer la limite des suites suivantes :

(a)  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n \end{cases}$

(b)  $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3} \end{cases}$

**Exercice 11 (\*\*)**

On joue à pile ou face avec une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir Pile vaut  $p$  et celle de Face vaut  $1 - p$ . On note  $P_k$  resp( $F_k$ ) l'évènement : "on obtient pile (resp. Face) au  $k$ ème lancer". On lance indéfiniment la pièce et on note  $X$  le rang où apparaît pour la première fois deux résultats pile consécutifs. Par exemple, si les premiers lancers donnent FPFPPFP alors  $X = 8$ .

**Attention : les questions (a) à (c) ne sont pas à faire dans le cadre du TD**

- (a) Calculer en fonction de  $p$  :  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 2)$ ,  $P(X = 3)$ ,  $P(X = 4)$ .  
 (b) Justifier que  $\{F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2\}$  forme un système complet d'évènements.  
 (c) En déduire que  $\forall n \geq 1$ ,  $P(X = n + 2) = (1 - p)P(X = n + 1) + p(1 - p)P(X = n)$ .  
 (d) On suppose à présent que  $p = 2/3$ . Montrer que  $\forall n \geq 0$

$$P(X = n) = \frac{4}{9} \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right]$$

- (e) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X = n)$ . Ce résultat est-il cohérent ?

**Exercice 12 (\*\*)**

On considère la suite  $u$  définie par :  $\forall n \geq 2$ ,  $u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$  et  $u_2 = 1$

- (a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n \leq 1$  puis donner la monotonie de la suite  $u$ .  
 (b) En déduire que la suite  $u$  est convergente.  
 (c) Montrer que  $\forall n \geq 2$ ,  $u_n = \frac{n}{2(n-1)}$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

*Calculer la limite par encadrement ou comparaison*

**Exercice 13 ()**

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $u_0 = 4$  et la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}|u_n - 2|$$

- (a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - 2| \leq 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$   
 (b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 14 (\*)**

On considère la suite  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . On cherche à montrer que celle-ci diverge à l'infini. On suppose que l'on a démontré précédemment le résultat suivant :

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x} \geq \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

- (a) Montrer alors que  $\forall n \geq 1$ ,  $u_n \geq \ln(n + 1)$ .  
 (b) En déduire la nature de la suite  $(u_n)_n$ .

**Exercice 15 (EDHEC 2008 - \*\*)**

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on définit la fonction  $f_n$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1 + e^x} + n x.$$

- (a) (i) Déterminer, pour tout réel  $x$ ,  $f'_n(x)$  et  $f''_n(x)$ .
- (ii) En déduire que la fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$
- (b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  ainsi que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .
- (c) (i) Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  possède une seule solution sur  $\mathbb{R}$ , notée  $u_n$ .
- (ii) Montrer que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{-1}{n} < u_n < 0$ .
- (iii) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$
- (iv) En revenant à la définition de  $u_n$ , montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n \times u_n = 1$ .

 *Calculer une limite en utilisant le théorème du point fixe*

**Exercice 16**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n - u_n^4$ .

- (a) Déterminer la monotonie de la suite.
- (b) Montrer que  $(u_n)$  est minorée par 0.
- (c) Étudier la convergence de  $(u_n)$ .

**Exercice 17 (\*)**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \geq 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f : x \rightarrow x + \frac{1}{x} - 1$ .

- (a) Montrer que  $[1; +\infty[$  est stable par  $f$ . C'est-à-dire que pour tout  $x \in [1; +\infty[$ , on a  $f(x) \in [1; +\infty[$ , ou de manière équivalente,  $f([1; +\infty[) \subset [1; +\infty[$ .
- (b) Montrer que pour tout  $x \in [1; +\infty[$ ,  $f(x) - x \leq 0$ .
- (c) En déduire la monotonie de  $(u_n)$ , puis étudier sa convergence.

**Exercice 18 (\*\*)**

Soit  $f$  définie par :  $f(x) = \ln(x) + x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

- (a) Étudier les variations de  $f$  et déterminer le signe de  $f(x) - x$ .
- (b) Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 > 1$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - (i) Montrer que pour tout entier  $n$  :  $u_n \geq 1$  et montrer que la suite est croissante.
  - (ii) Montrer qu'elle n'est pas majorée et déterminer sa limite.  
On suppose à présent que  $u_0 = e$ .
  - (iii) Montrer que, pour tout entier  $n$  :  $u_{n+1} \geq u_n + 1$ . En déduire que  $u_n \geq n + e$  et retrouver la limite de la suite.
- (c) Soit  $v$  définie par  $v_0 \in ]0; 1[$  et pour tout entier  $n$ ,  $v_{n+1} = f(v_n)$ . Montrer qu'il existe un entier  $n$  pour lequel  $v_n < 0$  et en déduire qu'elle n'est plus définie à partir du rang  $n + 1$ .

 *Utiliser le théorème des suites adjacentes*

**Exercice 19 (\*)**

- (a) Montrer que les suites  $u$  et  $v$  définies par ,  $\forall n \geq 1$  ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$  sont adjacentes.
- (b) Que pouvez-vous en déduire sur les suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  ?

**Exercice 20 (\*\*)**

Soient  $u_0 > v_0 > 0$ , et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

- (a) Démontrer en une seule récurrence que  $u_n$  et  $v_n$  existent et sont strictement positifs.
- (b) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq v_n$ .
- (c) Montrer que  $(u_n)$  est décroissante et que  $(v_n)$  est croissante.
- (d) Déduire des questions précédentes que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont bornées, puis qu'elles sont convergentes. On note respectivement ces limites  $l$  et  $l'$ .
- (e) Montrer que  $l = l'$ .
- (f) En déduire que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.