

 *Pratiquer la division euclidienne*


Exercice 14

Diviser le polynôme $X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 2X - 5$ par le polynôme $X^2 - 2X + 1$.

Exercice 15 (*)

Soit le polynôme P défini sur \mathbb{R} par $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

- Montrer que 1 est racine de P . En déduire alors une factorisation de P
- Etudier le signe de P sur \mathbb{R} .

 *Factoriser un polynôme*

Exercice 16

On souhaite résoudre l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $(E) : e^{2x} + 4e^x + 1 - 6e^{-x} = 0$.

- Trouver une fonction polynomiale de degré 3 P telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, x est solution de $(E) \Leftrightarrow P(e^x) = 0$.
- Montrer que 1 est racine de P .
- En déduire une factorisation de P .
- Déduire de ce qui précède la résolution de l'équation (E) .

Exercice 17 (*)

(a) Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

(b) Donner les domaines de définition des fonctions $\frac{1}{P}$ et $\ln(P)$.

(c) Étudier les variations de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$.

(d) Résoudre l'équation $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$.


Exercice 18 ()**

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 possédant 2 racines réelles α_1 et α_2 .

- En utilisant la forme factorisée du polynôme P , puis en développant l'expression obtenue, exprimer $\alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_2$ en fonction de a, b et c .
- Réciproquement, soient α_1 et α_2 deux nombres réels. Montrer que α_1 et α_2 sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - sx + p$ où $s = \alpha_1 + \alpha_2$ et $p = \alpha_1\alpha_2$.

On considère alors l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$

- Trouver une solution évidente.
- Combien vaut la somme et le produit des solutions ?
- En déduire l'autre solution.

 *Utiliser l'identification.*

Exercice 19

Déterminer les réels a, b, c tels que

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$, $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1} = \frac{x+1}{x^2(x-1)}$

Exercice 20 (*)

On se propose de calculer la somme $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$

- Trouver a et b tel que $\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$.
- En déduire la valeur de S_n en fonction de n .

Calculer des limites de polynômes

Exercice 21

Déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$(a) f_1(x) = x^5 + 3x^3 - x^2 + 1$$

$$(c) f_3(x) = \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^4 - 4x^3 + 2x}$$

$$(b) f_2(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x$$

$$(d) f_4(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{2x^3 - 1}$$

Exercice 22 (*)

Déterminer les limites suivantes en factorisant les polynômes au numérateur et au dénominateur :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 4e^{2x} + 3}{e^x - 1}$$

Exercice 23 (**)

Déterminer si la fonction

$$f(x) = \frac{3}{x^3 - 1} - \frac{2}{x^2 - 1}$$

est prolongeable par continuité en 1 le cas échéant, préciser la valeur en 1 qui rend la fonction continue.

Propriétés des polynômes.

Exercice 24 (*)

Soit le polynôme P défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = (x - 2)^4$. Calculer $P^{(k)}(x)$ pour tout $k > 0$.

Généralisation : Soit P le polynôme $P(x) = (x - a)^n$ pour $n > 0$. Calculer $P^{(k)}(x)$ pour tout $k > 0$.

Exercice 25 (**)

Dans cet exercice, on se propose de calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On introduit alors le polynôme. $P(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-p)^{n-k}$.

- Quelle est la forme factorisée de ce polynôme (indice, utiliser le binôme de Newton)
- Dérivez deux fois le polynôme P de deux façons différentes.
- En déduire S_n .
- On suppose que Y est une variable aléatoire telle que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. En s'aidant des calculs précédents, déterminer $E(Y^2)$. (On suppose dans cette question que l'on sait que $E(Y) = np$).
- En déduire $V(Y)$.

Exercice 26 (**)

Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation : $x^2 P'' - 3xP' + 3P = 0$ d'inconnue P . On commencera par étudier le coefficient dominant.

Exercice 27 (***)

Soit E l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant au moins une racine $\alpha \in \mathbb{R}$ et satisfaisant $P(x+1) = P(x)$.

- Montrer que si $P \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est une racine de P .
- Déduire l'ensemble des polynômes de E .