Questions de cours

Exercice 1 (Continuité en 0)
Montrer que les fonctions suivantes sont continues en 0.

(a) $f : x \to x^2 + 3x - 1$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & si\ x \neq 0 \end{cases}$

Exercice 2 (Continuité en 0)
Étudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \geq 0 \\ e^{1/x} & si\ x < 0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} e^x & si\ x < 0 \\ x^2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

Exercice 3 (Continuité par morceaux)
Montrer que les fonctions suivantes sont continues par morceaux

(a) $f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x < 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \in [-1; 1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

Exercice 4 (Continuité sur un intervalle)
Déterminer sur quels intervalles les fonctions $f(x) = \exp x + \ln x$, $g(x) = \sqrt{x^2+1}$, $h(x) = \frac{\ln(x+2)}{x-2}$ sont continues.

Exercice 5 (Continuité sur $\mathbb{R}$)
Montrer que les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \geq 0 \\ e^{1/x} & si\ x < 0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & si\ x > 0 \\ 1 + x & si\ x \leqslant 0 \end{cases}$

Exercice 6 (Prolongement par continuité)
Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}\right)$. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 7 (Théorème des valeurs intermédiaires)
On considère la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$. Montrer qu'il existe $x \in [-2; 2]$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 8 (TVI (2))
Déterminer $\exp([0,1])$, $\ln(]0,1])$ et $f([0,4])$ avec $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Exercice 9 (Corollaire du TVI)
(a) Soit $f(x) = e^x - x - 2$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins deux solutions sur $\mathbb{R}$.
(b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois solutions dans l'intervalle$[-1;\ 3]$

Exercice 10
(a) Quelle est l'image de $[-1, 3]$ par $f : x \to x^2$? Son max ? Son min ?
(b) Quelle est l'image du segment $[0; 2]$ par la fonction partie entière ? $E([0; 2])$ est-il un segment ? Pourquoi ?
(c) Quelle est l'image de l'intervalle $[1; +\infty[$ par la fonction inverse ? Max ? Min ? $f([1; +\infty[)$ est-il un segment ? Pourquoi ?

Exercice 11
Montrer que l'équation $e^x + x = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$

Exercice 12
On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \ln(2 + x^2)$.
(a) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à préciser.
(b) Déterminer le tableau de variation et les limites de la fonction réciproque de f.
(c) Expliciter la fonction réciproque de f.

Montrer qu'une fonction est continue en un point

Exercice 13
Étudier la continuité en 0 des fonctions :

(a) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^3} & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$

(b) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(2x^2)-1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

Exercice 14 (*)
Étudier la continuité en -1 des fonctions :

(a) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & si\ x \in]-1,0[\\ 1 & sinon \end{cases}$

(b) $f_4(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x+1}\right) & si\ x \neq -1 \\ 0 & si\ x = -1 \end{cases}$

Exercice 15 (*)
g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} e^x & si\ x < 0 \\ x^2+1 & si\ x > 0 \end{cases}$.

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 (**)
Rappeler le domaine de définition de $x \to x^x$. Cette fonction admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle

Exercice 17
A l'aide de théorèmes généraux, déterminer sur quel intervalle les fonctions suivantes sont continues.

(a) $f_1(x) = \ln(1+x^2)$

(b) $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

(c) $f_3(x) = exp\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 18 (*)
A l'aide de théorèmes généraux, déterminer sur quel intervalle les fonctions suivantes sont continues.

(a) $f_4(x) = \sqrt{1-4x^2}$

(b) $f_5(x) = \ln(2x^2-x-1)$

(c) $f_6(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$

Exercice 19 (*)
Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$.

(a) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$

(b) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(2x^2)-1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

Exercice 20 (**)
Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en x_0 le cas échéant, préciser la valeur en x_0 qui rend la fonction continue.

(a) $f_1(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{x-2}}$ en $x_0 = 2$.

(b) $f_2(x) = \dfrac{3}{x^3-1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ en $x_0 = 1$.

Indication : Pour f_2, démontrer que $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

Théorème de la bijection

Exercice 21
Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) + x$ est bijective (on précisera $f(\mathbb{R}_+^*)$)

Exercice 22 (*)
Montrer que l'équation $3 - 2x = e^x$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Vérifier que $0 \leq \alpha \leq 1$. Est ce que $\dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$?
(Valeurs numériques : $e = 2.718,\ e^{1/2} \approx 1.648$.)

Exercice 23 (**)
Soit la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = 5\ln(x+3) - x$.

(a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0; +\infty[$.

(b) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = x\left(5\dfrac{\ln(x)}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

(c) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

(d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

Manipuler les fonctions réciproques

Exercice 24
Montrer que $g(x) = e^{-x}$ est bijective sur $\mathbb{R}$ (on précisera $g(\mathbb{R})$). Déterminer g^{-1}. Tracer le tableau de variations complet de la fonction réciproque g^{-1}.

Exercice 25 (*)
La fonction $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(a) Montrer que sh est bijective.

(b) Déterminer sa bijection réciproque (résoudre $f(x) = y$ en posant $X = e^x$ et se ramener à une équation du second degré).

Exercice 26 (**)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, on pose $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, la fonction f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On la note x_n.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, $f_n\left(\dfrac{2}{n}\right) < f_n(x_n) < f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ puis que $\dfrac{1}{n} < x_n < \dfrac{2}{n}$.
Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 3}$?

(d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n x_n$ (on utilisera le fait que pour tout $n \geq 3$, $f_n(x_n) = 0$).

(e) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $n \geq 3$ et $x \in [0, 1]$. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 3}$.