Questions de cours

Exercice 1
Résoudre les systèmes suivants :

- Système à deux équations et deux inconnues - (S_1) : $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$
- Système homogène à deux équations et trois inconnues - (S_2) : $\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$
- Système à trois équations et deux inconnues - (S_3) : $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$

Exercice 2
Exprimer les systèmes de l'exercice 1 sous forme matricielle.

Exercice 3 (Résolution d'un système de Cramer)
Résoudre le système suivant en utilisant la forme matricielle. (S_4) : $\begin{cases} 4x+2y=3 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$

Exercice 4 (Systèmes échelonnés)
Résoudre les systèmes échelonnés suivants

$$(S_5) : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ y & = & 1 \end{array} \right. \qquad (S_6) : \begin{cases} 2x-y+3z & =1 \\ \quad\;\; y-z & =-1 \\ \qquad\quad z & =1 \end{cases}$$

Exercice 5 (Systèmes échelonnés)
Résoudre les systèmes échelonnés suivants

$$(S_7) : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ y+2z & = & 3 \\ 3z & = & 6 \end{array} \right. \qquad (S_8) : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ 2z & = & 3 \\ 3z & = & 6 \end{array} \right.$$

Exercice 6 (Plus d'équations que d'inconnues)
Résoudre les systèmes suivants

$$(S_8) : \begin{cases} 2x+y=4 \\ \quad\;\; y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad (S_9) : \begin{cases} x+2y=3 \\ x=1 \\ x+y=2 \end{cases}$$

Exercice 7 (Plus d'inconnues que d'équations)

$$(S_{10}) : \begin{cases} x+y+z=2 \\ \quad\;\; y+3z=0 \end{cases} \qquad (S_{11}) : \begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ \quad\;\; 2y-z=1 \end{cases}$$

Exercice 8 (Transformation de système)
Transformer ce système en un système échelonné à partir d'opérations élémentaires - (S_{12}) : $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x-2y+3z=1 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases}$

Exercice 9 (Pivot de Gauss (1))
Utilisez la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système - (S_{13}) : $\begin{cases} x-y+2z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

Exercice 10 (Pivot de Gauss (2))
Utilisez la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système

$$(S_{14})\ :\ \begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ x+2y+z=-1 \\ 2x+3y-z=2 \end{cases}$$

Exercice 11 (Matrice inversible)
La matrice suivante est-elle inversible : $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

Exercice 12 (Inverse de matrice)
Résoudre le système suivant en calculant l'inverse de la matrice associée.

$$(S)\ :\ \begin{cases} x-2y+z & =-3 \\ 2x+y+3z & =13 \\ 4x-2y+5z & =10 \end{cases}$$

Résolution de système

Exercice 13
Résoudre le système suivant $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{cases}$

Exercice 14 (*)
Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$

Exercice 15 (**)
Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 5x-10y-z-7t & = & 0 \\ x-2y+z-t & = & 0 \\ 2x-4y-z-3t & = & 0 \\ x-2y+4z & = & 0. \end{cases}$

Inversion de matrice

Exercice 16
Inverser la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes. Vérifier votre résultat en utilisant le théorème relatif à l'inverse de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 17 (*)
Les trois questions sont indépendantes

(a) Montrer que la matrice carrée $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse
(en utilisant des opérations élémentaires sur les matrices)

(b) Montrer que la matrice $C=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

(c) (i) Calculer l'inverse de la matrice $M=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

(ii) En déduire les solutions du système linéaire : $\begin{cases} 3x+2y-z & =5 \\ x-y+z & =1 \\ 2x-4y+5z & =-3 \end{cases}$.

Résolution de système à paramètre

Exercice 18 (*)
On donne le système suivant : (m est un réel donné)

$$(S)\ :\ \begin{cases} x+my=1 \\ mx+y=1 \end{cases}$$

(a) Pour quelles valeurs du paramètre réel m le système (S) est de Cramer ?

(b) Résoudre ce système

Exercice 19 (**)

(a) On considère le système (E_λ) : $\begin{cases} (1-\lambda)x+y+z=0 \\ x+(1-\lambda)y+z=0 \\ x+y+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

  (i) Pour quelles valeurs de λ, le système (E_λ) est-il de Cramer ?

  (ii) Résoudre le système selon les valeurs de λ.

(b) On considère le système (E_λ) : $\begin{cases} -2x-2y+z=\lambda x \\ -2x+y-2z=\lambda y \\ x-2y-2z=\lambda z \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

  (i) Pour quelles valeurs de λ, le système (E_λ) est-il de Cramer ?

  (ii) Résoudre le système selon les valeurs de λ.