Durée : 4 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

SIGMA N°3

MATHÉMATIQUES

Mars 2021 - De 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Pour rappel, les étudiants suivant le tutorat avec M Leboucher doivent chercher l'exercice 3B et ne pas faire l'exercice 3A.

Les autres étudiants sont libres de choisir l'exercice 3A ou 3B (mais il est conseillé de choisir l'exercice 3A).

Exercice I - Exponentielle de matrice

PARTIE I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrice définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Écrire un programme scilab permettant de trouver l'inverse de P.
2. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}
3. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.
   (a) Calculer la matrice T
   (b) Calculer $T^2,\ T^3$, puis T^n pour out entier naturel $n \geq 3$.
4. En déduire que :
$$\forall n \geq 3, \quad A^n = 0$$
où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.
5. Pour tout réel t, on défint la matrice $E\,(t)$ par :
$$E\,(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$
où I désigne la matrice unité (identité) d'ordre 3.
   (a) Montrer que :
$$\forall\,(t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E\,(t)\,E\,(t') = E\,(t + t')$$
   (b) Pour tout t réel, calculer $E\,(t)\,E\,(-t)$. En déduire que la matrice $E\,(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$.
   (c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $[E\,(t)]^n$ en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

PARTIE II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n nonnul, et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n\,(t)$ par :

$$E_n\,(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}B^k \text{ que l'on note } E_n\,(t) = \begin{pmatrix} a_n\,(t) & c_n\,(t) \\ b_n\,(t) & d_n\,(t) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que Q est inversible et donner son inverse.
2. En déduire que
$$Q^{-1}BQ = D$$
3. Pour tout entier naturel n, montrer que :
$$B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$$
exprimer de même $b_n(t)\,,\ c_n(t)\,,\ d_n(t)$ sous le forme d'une somme.
5. Déterminer les limites de $a_n(t)\,,\ b_n(t)\,,\ c_n(t)\,,\ d_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Pour tout t réel, onpose alors :
$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer les matrice E_1 et E_2, telles que pour tout t réel on ait :
$$E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$$
   (b) Calculer $E_1^2,\ E_2^2,\ E_1E_2,\ E_2E_1$.
   (c) En déduire que pour tout t réel, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 2 - EML 2018

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2;4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b,+\infty[$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. **a.** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

7. **a.** Écrire une fonction Scilab d'en-tête `u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

b. Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
function b = valeur_approchee(epsilon)
    n = 0
    while ........
        n = n+1
    end
    b = suite(n)
endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$. (On ne demande pas les limites)

10. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[$, $0 \leq \Phi(x) \leq x$.

11. **a.** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b. Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

12. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$. Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Exercice 3A - ECRICOME ECT 2010

Cet exercice étudie deux jeux de un dés avec des dés équilibrés à six faces.

I. Étude du premier jeu.

Dans ce jeu on lance simultanément deux dés équilibrés, si les deux donnent le même résultat alors le joueur marque 1 point, sinon il ne marque pas de point.

1. Calculer la probabilité p de l'événement A : « Les deux dés donnent le même résultat ».
2. Le joueur répète n fois le même jeu et on note alors Y_n le nombre de points obtenus par le joueur après ces n parties.
   (a) Reconnaitre la loi de Y_n (*une justification soigneuse est attendue*).
   Donner explicitement $P(Y_n = k)$ pour les valeurs k prises par Y_n.
   (b) Donner la valeur de l'espérance $E(Y_n)$ de la variable aléatoire Y_n et sa variance $V(Y_n)$.

II. Étude d'un deuxième jeu.

Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.

On note :

— D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé

— E_1 l'événement : $(D_1 < D_2)$, E_2 l'événement : $(D_1 = D_2)$ et E_3 l'événement : $(D_1 > D_2)$

Lors d'une partie,

— si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,

— si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,

— si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

Le joueur répète n fois ce jeu. Pour tout entier naturel $i \geq 1$, on note :

— X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{ème}$ partie ;

— S_i le nombre de points marqués après i parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3 (*On démontrera notamment que* $P(E_1) = P(E_3) = \dfrac{5}{12}$).
2. Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_i puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire S_1.
4. Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire S_2 et donner sa loi.
5. Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire S_3.
6. (a) Ecrire S_n en fonction des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n.
   En déduire l'espérance mathématique $E(S_n)$ de S_n.

   (b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

Exercice 3B - ECRICOME 2019 ECS

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.
On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{T},\ \mathbb{P})$
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ième tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$. On admet que pour tout entier k, X_k est une variable aléatoire de $(\Omega,\ \mathcal{T},\ \mathbb{P})$.

Partie A

1. Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.
2. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}$$

3. Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.
4. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i])$
   (On distinguera différents cas selon les valeurs relatives de i et j).
5. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2}\,\mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2}\,\mathbb{P}([X_k = i-1]) \qquad (*)$$

6. À l'aide de la formule (*) déterminer la loi de X_3.
7. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}([X_k = 1]) = \dfrac{1}{(k+1)!}$
   (b) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}([X_k = k+1])$
   (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}([X_k = 2])$
   Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.
   Montrer que la suite $(b_k)_{k\geqslant 0}$ définie par :$\forall k \in \mathbb{N}, b_k = a_k + k + 2$ est géométrique.
   En déduire alors que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_k = 2]) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$$

Partie B

8. Que renvoie la fonction `Scilab` suivante pour un entier k non nul ?
   Détailler le fonctionnement de la ligne 5.

```
1 function x=mystere(k)
2     n=1;
3     b=1;
4     for i=1:k
5         r=floor(rand()*(n+b)+1)
6         if r>n then
7             n=n+1
8         else
```

```
            b=b+1
        end
    end
    x=b
endfunction
```

9. Ecrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function LE=loi_exp(k,N)` qui prend en entrée un entier strictement positif k et un entier N, qui effectue N simulations de k tirages successifs dans l'urne et qui retourne un vecteur `LE` qui contient une estimation de la loi de X_k (c'est-à-dire que pour chaque $i \in [[1, k+1]]$, `LE(i)` contient la fréquence d'apparition de l'événement $[X_k = i]$ au cours des N simulations).
   On pourra utiliser la fonction mystere.
10. Recopier et compléter la fonction `loi_theo` suivante, qui prend en entrée un entier strictement positif n, afin qu'elle retourne un vecteur LT qui contient la loi théorique de X_n.

```
function LT=loi_theo(n)
    M=zeros(n,n+1)
    M(1,1)=1/2
    M(1,2)=1/2
    for k=1:n-1
        M(k+1,1)=......
        for i=2:k+1
            M(k+1,i)=......
        end
         M(k+1,k+2)=......
    end
    LT=......
endfunction
```

11. Un étudiant nous propose comme loi de .X_5 le résultat suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}([X_5 = k])$	0.001368	0.079365	0.419434	0.418999	0.079454	0.00138

A-t-il utilisé `loi_exp` ou bien `loi_theo` ?

Partie C

12. Pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant j < i$, on définit l'application $\varphi_{i,j}$ par .

$$\varphi_{i,j} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & jP(X+1) - iP(X) \end{array}$$

   (a) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $\deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(P)$

   (b) Montrer que l'on a la relation

$$\varphi_{i,j}(P) = 0 \Rightarrow P = 0$$

   On considère que ce qui précède justifie le fait que l'application $\varphi_{i,j}$ est bijective. On définit le polynôme $P_{i,j}$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant j \leqslant i$, en posant

$$P_{1,1}(X) = 1, \quad \text{et pour } 1 \leqslant j < i, \quad P_{i,j}(X) = \varphi_{i,j}^{-1}\left((3 + X - i)P_{i-1,j}(X)\right)$$

   et enfin pour tout entier $i > 1$.

$$P_{i,i}(X) = -\sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0)$$

13. (a) Vérifier que : $P_{2,1}(X) = -X - 2$, puis calculer $P_{2,2}(X)$
    (b) Vérifier que : $P_{3,2}(X) = -2X - 4$
    On admettra dans la suite que : $P_{3,1}(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1$ et $P_{3,3}(X) = 3$.
14. On considère, pour tout entier i de $\mathbb{N}^*$, la propriété suivante .

$$\mathcal{H}_i : ´ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_k = i]) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k) j^k ˇ$$

On souhaite montrer par récurrence que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_i$, est vraie.

(a) Montrer que $\mathcal{H}_1$ est, vraie.

(b) Soit $i > 1$. On suppose que $\mathcal{H}_{i-1}$ est vraie et on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k = (k+1)!\mathbb{P}([X_k = i]) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k$$

En utilisant la formule (*) et la relation $(3 + X - i)P_{i-1,j}(X) = \varphi_{i,j}(P_{i,j}(X))$ montrer que la suite $(\alpha_k)_{k\geqslant 0}$ est géométrique.
Déterminer $\alpha_0$et en déduire $\mathcal{H}_i$ que est vraie.

(c) Conclure.