Durée : 4 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

CONCOURS D ADMISSION SIGMA n°2C 2020
Concepteur : M Leboucher

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Vendredi 8 Janvier 2021 - De 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Important : Vous devez faire un et un seul exercice du même thème, c'est-à-dire portant le même numéro (exemple Exercice 1A ou Exercice 1B). Si deux exercices sont fait, un des deux ne sera pas corrigés.

Indiquez bien à chaque fois sur votre copie le numéro de l'exercice traité.

Exercice 1 - Résoudre une équation

Exercice 1A (cours)
Résoudre les équations suivantes.

1. $\dfrac{x+1}{2x-3} = 2$
2. $3x^2 - 4x + 1 = 0$

Exercice 1B (Application)
Résoudre les équations suivantes.

1. $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$
2. $xe^{2x-5} = x$

Exercice 2 - Tracer des courbes

Exercice 2A (cours)
Tracer sur un même graphique les courbes d'équations

1. $y = 1$
2. $y = 2x - 1$
3. $y = \sqrt{x}$

Exercice 2B (Application)
Tracer sur un même graphique les courbes d'équations

1. $y = -3x + 2$
2. $y = x^2 - 4x + 3$
3. $y = \dfrac{1}{x}$

Exercice 3 - Déterminer le domaine de définition d'une fonction

Exercice 3A (cours)
Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1. $f : x \to \dfrac{1}{x^2 - 4x}$
2. $g : x \to \sqrt{x^2 - 9}$
3. $h : x \to \ln(x - 4)$.

Exercice 3B (Application)
Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1. $f : x \to \dfrac{1}{\ln(x-2)}$
2. $g : x \to \ln(x)\sqrt{x^2 - 4}$
3. $h : x \to \ln\left(\dfrac{x^2+3}{e^x - 1}\right)$.

Exercice 4 - Manipuler des valeurs absolues

Exercice 4A (cours)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $|x + 2| = 3$
2. $|x + 1| - |2 - 2x| = 2$.
3. $|x| > -9$

Exercice 4B (Application)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $|x| > -3$
2. $|3x - 1| < |x + 2|$
3. $|x^2 - 1| = |2x - 4|$

Exercice 5 - Déterminer la formulation explicite des suites classiques.

Exercice 5A (cours)
Déterminer les formules explicites des suites suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 6$.
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 1$, $v_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 4v_n - 3v_{n-1}$.

Exercice 5B (Application)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 4u_n + 5^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n}{5^n}$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 6 - Exprimer des évènements en fonction d'intersection, d'union et du complémentaire.

Exercice 6A (cours)
Une urne contient 6 boules noires et 4 boules vertes. On tire 4 boules sans remises dans cette urne. Soit A_i l'évènement "On obtient une boule verte au $i^{ème}$ tirage" pour $i \in [\![1, 4]\!]$. Exprimer les évènements suivants en fonction des A_i :

1. B_1 : "On obtient la première boule verte au premier tirage"
2. B_2 : "On obtient la première boule verte au second tirage"
3. B_4 : "On obtient la première boule verte au quatrième tirage"

Exprimer les évènements C_i en fonction des A_j puis en fonction des B_j

1. C_4 : "On obtient 4 boules vertes"
2. C_1 : "On obtient une seule boule verte"
3. C_0 : "On n'obtient aucune boule verte"

Exercice 6B (Application)
On lance n fois un dé à 6 faces et on note A_i l'évènement, "on obtient un 6 au ième tirage". Exprimez les évènements suivants en fonction des A_i :

1. B_1 : "On obtient le premier 6 au premier tirage."
2. B_2 : "On obtient le premier 6 au second tirage."
3. Pour tout $k \in [\![3, n]\!]$, B_k : "On obtient le premier 6 au k-ème tirage."
4. C : "On n'obtient que des 6 ".
5. D : "On obtient au moins un 6".
6. E : "On n'obtient aucun 6".
7. F : "On obtient le second 6 au troisième tirage".
8. G_k : "On obtient le second 6 au k-ième tirage".

Exercice 7 - Déterminer la probabilité d'une union finie.

Exercice 7A (cours)
On a dix cartes numérotés de 1 à 4. On tire successivement 3 cartes avec remise dans cette urne on note les évènements A_i : " Tirer la carte n° 1 au $i^{ème}$ tirage". On définit enfin les évènements B_i : "On obtient au moins une carte n° 1 lors des i premiers tirages". Calculez $P(B_1)$, $P(B_2)$ et $P(B_3)$.

Exercice 7B (Application)
On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer n lancers d'une pièce non truquée.

1. Calculer la probabilité de l'évènement C : "On obtient un pile au premier et au dernier tirage"
2. On considère les évènements D : "Les tirages 1 et 2 amènent chacun un pile", E : "Les tirages 2 et 3 amènent chacun un pile" et F : "Les tirages 3 et 4 amènent chacun un face". Calculer la probabilité qu'au moins un de ces évènements soient réalisés.

Exercice 8 - Utiliser la formule des probabilités totales.

Exercice 8A (cours)
En 2020, 75% des Français de plus de 18 ans ont regardé des vidéos Youtube. Une entreprise, pour sa nouvelle marque "ECEOne" décide de procéder à une stratégie publicitaire sur Youtube. 75% des utilisateurs de Youtube entendent parler de "ECEOne". 10% des personnes n'utilisant pas Youtube ont tout de même entendu parler de cette nouvelle marque (Le fameux bouche à oreille). On interroge au hasard un français majeur.

1. Sachant que c'est un utilisateur de Youtube, quelle est la probabilité qu'il ait entendu parler de la marque "ECEOne" ? (On attend la définition des évènements que l'on utilisera").
2. Quelle est la probabilité que ce soit un utilisateur de Youtube et qu'il a entendu parler de la marque "ECEOne" ?
3. Quelle est la probabilité que ce Français ait entendu parler de la marque "ECEOne" ?
4. On sait que cet individu connait la marque "ECEOne", quelle est la probabilité que ce soit un utilisateur de Youtube ?

Exercice 8B (Application)
On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.
- Si l'on tire un carreau, on lance un dé à 4 faces.
- Si l'on tire un coeur, on lance un dé à 6 faces.
- Si l'on tire un trèfle, on lance un dé à 10 faces.
- Si l'on tire un pique, on lance un dé à 12 faces.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir un résultat de 1 sur le dé lancé est $\frac{3}{20}$.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat de 8 sur le dé lancé ?
3. On obtient un résultat de 8. Quelle est la probabilité d'avoir tiré une carte de carreau ?
4. On obtient un résultat de 1. Quelle est la probabilité d'avoir tiré une carte de carreau ?

Exercice 9 - Manipuler une inégalité mettant en jeu une somme.

Exercice 9A (cours)

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{1+k} \leq \frac{(n+4)(n+1)}{4}$.

Exercice 9B (Application)

1. Montrer que pour tout $x \geq 2$, $\dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Exercice 10 - Calculer des limites avec indétermination.

Exercice 10A (cours)
Donnez les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x^4 + 3x^2 - x$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{(\ln(x))^5}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^2 + 5x}{2x^4 + x^3 - 3x + 5}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Exercice 10B (Application)
Donnez les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x+2}}{(\ln(x))^3}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x - x^3 + 1$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-4} - \sqrt{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}}$
5. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\ln(2)\\ >}} \frac{e^{2x} - 4}{e^{2x} - 4e^x + 4}$
6. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$

Exercice 11 - Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire

Exercice 11A (cours)
On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant :

k	-1	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

1. Calculer $E(X)$.
2. Calculer $V(X)$.

Exercice 11B (Application)
Un joueur participe au jeu suivant. On lance 3 fois de suites une pièce de monnaie non truquée. Le joueur gagne j euros si la pièce donne pile pour la première fois au j ème lancer. Si la pièce ne donne jamais pile, le joueur perd 1 euros. On note X la variable aléatoire représentant le gain du joueur.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$.
3. Calculer $V(X)$.

Exercice 12 - Inverser une matrice.

Exercice 12A (cours)

1. Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes.
2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Exercice 12B (Application)

1. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
2. Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer C^{-1}.

Exercice 13 - Montrer qu'une fonction est continue en un point.

Exercice 13A (cours)
Étudier la continuité en 0 des fonctions suivantes définies sur $]-1;+\infty[$:

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si\ x \neq 0 \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} & si\ x < 0 \\ e^x - 1 & si\ x \geqslant 0 \end{cases}$

Exercice 13B (Application)
Étudier la continuité en 0 des fonctions suivantes définies sur R :

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ x^3 \ln(x^2) & si\ x \neq 0 \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - x}{x^2 - x} & si\ x < 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$

3. La fonction $h : x \to \dfrac{x - \ln(x+1)}{\ln(x+1)}$ est définie et continue sur $]-1;0[$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 14 - Écrire un script qui utilise une instruction conditionnelle.

Exercice 14A (cours)
Écrire un script Scilab qui demande à l'utilisateur le nombre d'heures de Scilab travaillée pendant les vacances et qui affiche le message "beau travail" si le nombre d'heures travaillés est supérieur ou égal à 3 heures et le message "C'est insuffisant !" sinon.

Exercice 14B (Application)
Écrire un Script Scilab qui :

- Demande à l'utilisateur d'entrer 3 nombres a, b et c.
- Calcule la ou les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$. (On fera des disjonctions de cas appropriés selon les valeurs de a, b et c).
- Affiche la ou les solutions ou affiche un message d'erreur s'il n'y a aucunes solutions.

Exercice 15 - Calculer une somme (Scilab).

Exercice 15A (cours)

On considère la somme $S = \sum_{k=0}^{95} ke^{-k^2}$ Écrire un script Scilab qui calcule et affiche le résultat de la somme S.

Exercice 15B (Application)

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ et la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Écrire un script Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer un nombre entier n puis qui calcule et affiche S_n.

Exercice 16 - Tracer le graphe représentatif d'une fonction (Scilab).

Exercice 16A (cours)

On considère la fonction $f : x \to \ln(x+1) - \sqrt{x}$. Écrire une fonction Scilab modélisant la fonction f puis écrire le code permettant de représenter la fonction f sur l'intervalle $[0, 5]$ (on prendra au minimum 5000 points pour tracer la fonction)

Exercice 16B (Application)

On considère la fonction $f :\to \ln(x+1) - \sqrt{x}$ et on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + f(u_n)$.

1. Écrire une fonction Scilab modélisant la fonction f.
2. Mettre dans une matrice U colonne ou ligne les résultats de u_0, u_1, ..., u_{50}.
3. Représenter les 50 premiers éléments de la suite sur un graphique (On prendra en abscisse les nombres entiers de 0 à 50).