

---

**Durée** : 4 heures

Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

CONCOURS D ADMISSION SIGMA N°2B 2021  
Concepteur : M Leboucher

---

OPTION ÉCONOMIQUE  
MATHÉMATIQUES

Vendredi 8 Janvier 2021 - De 8h à 12h

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

*Il est conseillé de rédiger chaque exercice sur une copie différente.*

---

## Exercice 1 - Inspiré HEC 2019

1. Dans cette question, on considère les matrices  $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ,  $L = [1, 2, -1] \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$  et le produit matriciel  $M = CL$ .

(a) i. Calculer  $M$  et  $M^2$ .

ii. Pour  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , résoudre  $. La matrice  $M$  est-elle inversible ?$

(b) i. Soit  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ . Justifier que  $P$  est inversible et calculer le produit  $P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

ii. Trouver une matrice inversible  $Q$  dont la transposée  ${}^tQ$  vérifie :  ${}^tQ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

iii. Pour une telle matrice  $Q$ , calculer le produit  $PMQ$ .

2. La fonction Scilab suivante permet de multiplier la  $i$ -ème ligne  $L_i$  d'une matrice  $A$  par un réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire  $L_i \leftarrow aL_i$  (où  $a \neq 0$ ).

```
function B=multlig(a,i,A)
    [n,p] = size(A)
    B = A
    for j=1:p
        B(i,j)=a*B(i,j)
    end
endfunction
```

(a) Donner le code Scilab de deux fonctions `addlig` (d'arguments `b, i, j, A`) et `echlig` (d'arguments `i, j, A`) permettant d'effectuer respectivement les deux autres opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice :

$$L_i \leftarrow L_i + b_j L_j (i \neq j) \quad \text{et} \quad L_i \leftrightarrow L_j (i \neq j).$$

(b) Expliquer pourquoi la fonction `multligmat` suivante retourne le même résultat  $B$  que la fonction `multlig`.

```
function B = multligmat(a,i,A)
    [n,p] = size(A)
    D = eye(n,n)
    D(i,i) = a
    B = D*A
endfunction
```

3. Dans cette question, on note  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui vérifie la propriété suivante : Il existe une matrice-colonne non nulle  $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et d'une

matrice-ligne non nulle  $L = [\ell_1, \dots, \ell_n] \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  telles que  $M = CL$

Pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on note  $E_{i,j}$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de sa  $i$ -ème ligne et de sa  $j$ -ème colonne, qui vaut 1.

(a) Calculer la matrice  $MC$ . En déduire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tel que  $MC = \lambda C$ .

(b) Soit  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . En utilisant l'égalité  $M = CL$ , résolvez l'équation  $MX = 0$ .

## Exercice 2 - Inspiré ESC 2001

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; 1[$  par  $f(x) = 2xe^x$

1. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0; 1[$  sur un ensemble que l'on déterminera.

On note  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$ . Donner les tableaux des variations de  $f$  et de  $f^{-1}$

2. Vérifier qu'il existe dans  $]0; 1[$  un et un seul réel noté  $\alpha$  tel que  $\alpha e^\alpha = 1$ .

Montrer que  $\alpha \neq 0$ .

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \in ]0, 1]$

4. Montrer que pour tout réel  $x$  de  $]0; 1[$ ,  $f(x) - x \geq 0$ . Vérifier que l'égalité ne se produit que pour  $x = 0$ .

5. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.

6. On pose pour tout entier naturel  $n$  :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

(a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$

(b) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$

(c) Montrer que  $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

(d) En déduire que la limite de la suite  $(u_n)$  est 0. (Indication : On pourra appliquer le théorème des gendarmes aux suites, résultat que l'on verra plus tard).

## Problème - Inspiré EDHEC 2017

### Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant  $n$ . D'après le premier des deux points précédents, on a donc  $X_0 = 1$ .

1. Donner la loi de  $X_1$ , ainsi que l'espérance  $E(X_1)$  de la variable  $X_1$ .
2. Montrer que la loi de  $X_2$  est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

3. Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par  $X_n$ .
4. (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

- (b) Vérifier que cette relation reste valable pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .
- (c) Justifier que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$  et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

- (d) Établir alors que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ .
5. (a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

- (b) En déduire une relation entre  $P(X_{n+1} = 2)$  et  $P(X_n = 2)$ .

- (c) Montrer enfin que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ .

6. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

7. Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , l'espérance  $E(X_n)$  de la variable aléatoire  $X_n$ .

**Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A**

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on considère la matrice-ligne de  $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$  :

$$U_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4))$$

8. (a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = U_n A.$$

- (b) Établir par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = U_0 A^n$ .  
 (c) En déduire la première ligne de  $A^n$ .
9. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice  $A^n$ , puis écrire ces trois lignes.

**Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A**

On considère les matrices  $I$  et  $J$  suivantes :  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

10. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $A = aI + bJ$ .
11. (a) Calculer  $J^2$  puis établir que, pour tout entier naturel  $k$  non nul, on a :  $J^k = 4^{k-1}J$ .  
 (b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier  $n$  non nul, l'expression de  $A^n$  comme combinaison linéaire de  $I$  et  $J$ .  
 (c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour  $n = 0$ .

**Partie 4 : informatique**

12. Écrire un script Scilab qui permet de demander à l'utilisateur d'entrer un entier  $n$  et qui affiche la valeur de  $U_n$  en utilisant la matrice  $A$ .

☞ **Remarque** : Cette dernière partie était normalement différente mais hors programme de première année.