
Durée : 4 heures

Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

CONCOURS D ADMISSION SIGMA N°2A 2021
Concepteur : M Leboucher

OPTION ÉCONOMIQUE
MATHÉMATIQUES

Lundi 4 Janvier 2021 - De 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Il est conseillé de rédiger chaque exercice sur une copie différente.

Exercice 1 - Inspiré d'ECRICOME 2020

Dans cet exercice, on désigne par \mathcal{M}_3 l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de \mathcal{M}_3 . Soit a un réel; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M , puis calculer $(M - I_3)^2$.
2. La matrice M est-elle inversible? Si oui, donnez son inverse.

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

3. Déterminer l'ensemble des réels (x, y, z) tels que $M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (On pourra poser un système d'équation à résoudre).
4. Démontrer que M n'est pas inversible.

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on pose les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que le système $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ est un système de Cramer. Déterminer alors son unique solution.
6. Calculer $M \times u$, $M \times v$ et exprimer les résultats obtenus en fonction de a , u et v .
7. Calculer $M \times w$ et trouver deux réels α et β tels que $Mw = \alpha v + \beta w$.
8. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1} .
9. Montrer que la matrice $T = P^{-1}MP$ est $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
10. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
11. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PT^nP^{-1}$. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n .

Exercice 2 Inspiré EML 2019 et ECRICOME 2019

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, h_1(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$$

et la suite u_n définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n} = h_1(u_n)$.

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction h_1 sur $]0, +\infty[$.
2. Dresser le tableau des variations de h_1 en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de h_1 en $x = 2$.
4. Écrire un script Scilab permettant d'afficher le graphique de la fonction h_1 entre 0 et 5 (on prendra au moins 1000 points pour le tracé).
5. Tracer la courbe représentative de h_1 ainsi que sa tangente en $x = 1$.
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et est strictement supérieur à 0.
7. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
8. Écrire un programme Scilab demandant à l'utilisateur d'entrer un nombre n et affichant u_n .
9. Montrer que h_1 réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[3, +\infty[$.

On note $g : [3, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de h_1 à $[1, +\infty[$.

10. (a) Dresser le tableau de variations de g .
- (b) Soit $y \in [3, +\infty[$.
En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $h_1(x) = y$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y .

Partie B : Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0 \quad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
2. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées w_n et v_n et vérifiant : $0 < w_n < 1 < v_n$.
3. (a) Démontrer que :

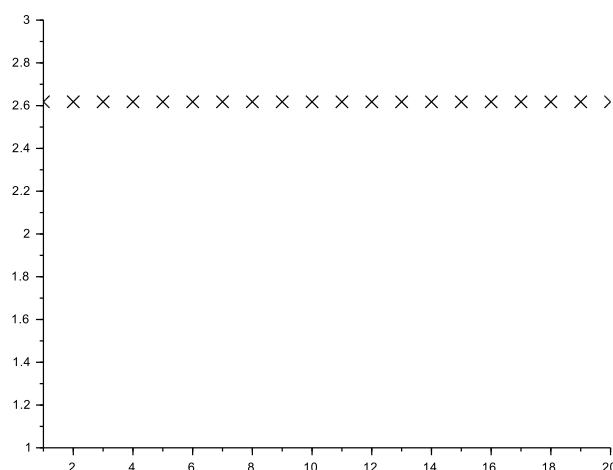
$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$$

- (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4$.
- (c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.
4. (a) Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad v_n \leq 3$
- (b) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function y=h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}^{+*}$ en entrée.

- (c) On admet que l'on a écrit une fonction v qui à chaque entier n associe une valeur approchée de v_n . On écrit alors le code suivant :

```
X=1:20
Y=zeros(1,20)
for k=1:20
    Y(k)=v(k)^k
end
plot2d(X,Y,style=-2,rect=[1,1,20,3])
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.

Que peut-on conjecturer ?

- (d) Montrer que : $\forall n \geq 1, \quad (v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Exercice 3 - Inspiré de ECRICOME ECT 2017 et ECRICOME ECE 2015

Partie I : tirages dans une urne

Une urne \mathcal{U} contient 1 boule noire et 9 boules blanches indiscernables au toucher.

- On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans \mathcal{U} . On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
 - Quelle est la loi de X ?
On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
 - Donner la valeur de l'espérance de X notée $E(X)$ et de la variance de X , notée $V(X)$.
- On procède cette fois-ci dans \mathcal{U} à une suite de 4 tirages avec remise d'une boule. On appelle Y la variable aléatoire égale à 1 si on a tiré au moins une boule noire, 0 sinon.
 - Quelle est la loi de Y ?
On précisera $Y(\Omega)$ et $P(Y = k)$ pour tout $k \in Y(\Omega)$.
 - Donner la valeur de $E(Y)$ et de $V(Y)$.

3. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne \mathcal{U} successivement et sans remise les 10 boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire. On notera pour tout entier naturel i non nul :
- N_i l'évènement "On tire une boule noire lors du i -ème tirage".
 - B_i l'évènement "On tire une boule blanche lors du i -ème tirage".
- (a) En écrivant soigneusement les évènements utilisés, calculer $P(Z = 1)$, $P(Z = 2)$ et $P(Z = 3)$.
- (b) Quelle est la loi de Z ?
On précisera $Z(\Omega)$ et $P(Z = k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.
- (c) Donner les valeurs de $E(Z)$ et de $V(Z)$.

Partie II : tirages doubles dans une urne choisie au hasard

L'urne \mathcal{U} , contient toujours 1 boule noire et 9 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne \mathcal{V} , contient 5 boules noires et 5 boules blanches indiscernables au toucher.

On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans \mathcal{U} , et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans \mathcal{V} . On note :

- U l'évènement "On choisit l'urne \mathcal{U} ".
- V l'évènement "On choisit l'urne \mathcal{V} ".

On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

1. Que vaut $T(\Omega)$?
2. Donner la loi de T . On vérifiera que $P(T = 1) = \frac{17}{50}$.
3. Calculer $E(T)$. La variable aléatoire T suit-elle une loi binomiale ?
4. Sachant que l'évènement $[T = 1]$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?

Partie III : Tirages infinies dans une urne choisie au hasard

L'urne \mathcal{U} , contient toujours 1 boule noire et 9 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne \mathcal{W} , contient 10 boules blanches. On choisit une des deux urnes aux hasard (chaque urne ayant la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules sans remise jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie. On note S la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués. On note :

- U l'évènement "On choisit l'urne \mathcal{U} ".
- W l'évènement "On choisit l'urne \mathcal{W} ".

1. Montrer que pour tout entier $j \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$:

$$P_U(S = j) = \frac{1}{10}$$

2. On calcule $P_W(S = j)$ pour tout entier $j \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$. (On distinguera les cas $j = 10$ et $1 \leq j \leq 9$).
3. Montrer que :

$$P(S = j) = \begin{cases} \frac{1}{20} & \text{si } j \in \llbracket 1, 9 \rrbracket \\ \frac{11}{20} & \text{si } j = 10 \end{cases}$$

4. Calculer l'espérance de S .
5. Calculer la variance de S . (On donne $31^2 = 961$ et $4 \times 277 = 1108$)