Durée : 4 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

CONCOURS D ADMISSION SIGMA n°1 2020
Concepteur : M Leboucher

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 3 Novembre 2020 - De 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Il est conseillé de rédiger chaque exercice sur une copie différente.

EXERCICE 1 - Calculs de Sommes

1. Montrez par récurrence la formule

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

2. Calculez et donnez le résultat des sommes suivantes sous forme factorisée.

   (a) $A = \sum_{k=1}^{n} 2k + k^2$ (b) $B = \sum_{k=2}^{n} 2^k$ (c) $C = \sum_{k=2}^{n+2} (k-2)^3$

3. Calculez et simplifiez la somme suivante : $D = \sum_{k=3}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

4. Calculez et simplifiez la somme suivante : $E = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1}(-1)^{n-k}$

EXERCICE 2 - ECRICOME 2020 - Voie ECT

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$

1. Recopier et compléter les trois lignes incomplètes du script Scilab ci-dessous pour qu'il calcule u_n pour n entier naturel entré par l'utilisateur :

```
n=input('entrer un entier n'  : )
u=0; v=1
for k= .........
     w=u
     u=.........
     v=.........
end
disp(u)
```

2. A l'aide de la méthode vue en cours, déterminer la formule de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va dans la suite trouver une autre méthode pour déterminer u_n.
3. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   En déduire l'expression de s_n en fonction de n.
4. On pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = (-1)^n u_n \quad \text{ct} \quad t_n = v_n - v_{n+1}$$

   (a) Exprimer t_n en fonction de s_n pour tout entier naturel n
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, on a $t_n = (-8)^n$

5. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Calculer la somme $\sum_{i=0}^{n-1}(-8)^i$
   (b) Justifier que : $\sum_{i=0}^{n-1}(v_i - v_{i+1}) = -v_n$.
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis vérifier que la formule pour (u_n) obtenue est la même que pour la question 2.

Partie B
On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $M^2 - 7M - 8I_3$.

2. En déduire que M cst inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M et de I.

3. (a) On pose : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Vérifier que : $M^0 = a_0M + b_0I$
(b) Déterminer deux réels a_1 ct b_1 tels que : $M^1 = a_1M + b_1I$
(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_nM + b_nI$. En déduire les formules de récurrences des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = u_n$$

où (u_n) est la suite définie dans la Partie A et calculer alors M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 3 - ECRICOME 2020 Voie ECT

Partie A
1. Justifier que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. d'inconnue réelle x, n'admet aucune solution.
On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 + x + x^2}$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de f. On remarquera en particulier que f est croissante sur l'intervalle [-1,1].

4. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 .
(b) Montrer que pour tout réel x de $[-1, +\infty[$, on a : $f(x) \leqslant x$ Donner une interprétation graphique de ce résultat.

5. Tracer l'allure de $(\mathcal{C}_f)$ et (T) dans un repère orthonormé. On soignera en particulier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (T)

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1+u_n+u_n^2}$$

1. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$$

2. Montrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$$

3. Écrire un script Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier n et qui calcule et affiche u_n.

Partie C

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

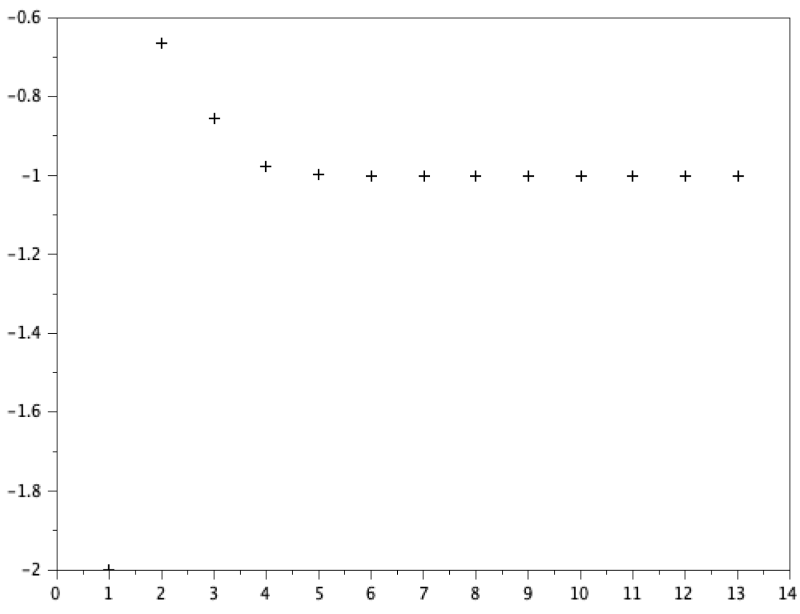
$$v_1 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1+v_n+v_n^2}$$

1. En utilisant la question 3 de la Partie A, démontrer par récurrence que :

$$\forall n \geqslant 2, -1 \leqslant v_n \leqslant 0$$

2. En utilisant la question 4 de la Partie A, montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

3. À l'aide de Scilab, on trace les premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et on obtient la figure ci-dessous. Conjecturer alors la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$



4. (a) Résoudre l'équation $f(x) = -1$, d'inconnue réelle x.

(b) Montrer par l'absurde que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \neq -1$$

Exercice 4 - Probabilités

Une entreprise peut faire appel à deux fournisseur, la société A et la société B. La probabilité pour que la société A livre un produit conforme est de $\frac{9}{10} = 0,9$ alors que la probabilité que la société B livre un produit conforme est de $\frac{19}{20}$: On se propose d'étudier diverses situations liées à ces données.

Situation 1

Pour des raisons tarifaires, l'entreprise décide d'utiliser la société A dans 60% des cas, et la société B sinon. On notera les évènements

— A : "L'entreprise choisit la société A"
— B : "L'entreprise choisit la société B"
— C : "L'entreprise reçoit un produit conforme"

1. Sachant que l'entreprise A a été choisie, quelle est la probabilité que le produit soit conforme ?
2. Un jour donné, calculer la probabilité que le produit livré soit conforme.
3. Un jour donné, le produit n'est pas conforme. Quelle est la probabilité qu'il ait été livré par la société A ?
4. Les évènements A et C sont-ils indépendants ?
5. On considère dans cette question que l'entrepris décide d'utiliser la société A avec une probabilité $x \in [0; 1]$. Pour quelle valeur de x, les évènements A et C sont indépendants ?

Situation 2

Dans cette situation, il est décidé que le premier jour, l'entreprise utilise la société A. Puis si au jour n ($n \in \mathbb{N}^*$), le produit arrivé n'est pas conforme, alors l'entreprise choisit la société B au jour $n+1$, si le produit est conforme, elle choisit la société A au jour $n+1$. On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement C_n : " le colis est conforme au jour n", et on note $p_n = P(C_n)$:

1. Déterminer p_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{1}{20}p_n + \frac{19}{20}$.
3. En déduire p_n en fonction de n.
4. Écrire un programme scilab qui calcule et affiche les termes de p_1 à p_n où n est un entier naturel entré par l'utilisateur.

Situation 3

Finalement, l'entreprise décide d'utiliser les sociétés en fonction de leurs précédentes réussites. Pour cela ils utilisent une urne contenant des boules rouges et vertes. Chaque jour, l'entreprise tire une boule. Si la boule tirée est rouge, l'entreprise utilisée la société A. Sinon elle utilise l'entreprise B. Enfin,

— Au jour 1, on a 1 boule rouge et 1 boule verte.
— Si la société A livre un produit conforme, on rajoute une boule rouge dans l'urne, sinon on ajoute une boule verte.
— Si la société B livre un produit conforme, on rajoute une boule verte dans l'urne sinon on ajoute une boule rouge.

On notera les évènements

— C_n : "Le produit est conforme au jour n".
— A_n : "On choisit la société A au jour n".
— B_n : "On choisit la société B au jour n".

1. Que dire des évènements A_n et B_n ?
2. Calculer $P(A_1)$ et $P(B_1)$.
3. Sachant qu'au premier jour, on a choisi la société A et que le produit était conforme, quelle est la probabilité de choisir la société A au deuxième jour ?
4. Calculer la probabilité d'avoir choisi la société A au jour 1 et au jour 2.
5. Calculer $P(A_2)$. En déduire $P(B_2)$.
6. Les évènements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?