

---

**Durée** : 4 heures

Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

# DEVOIR SURVEILLE N°4B

---

## MATHÉMATIQUES

Samedi 22 Mai 2021 - De 8h à 12h

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

---

## Exercice 1 - Espaces Vectoriels

Les 2 questions sont indépendantes.

1. On considère l'ensemble  $E = \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

- Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel.
- Déterminer 2 vecteurs  $u$  et  $v$  tel que  $E = \text{vect}(u, v)$ .
- Montrer que les vecteurs  $u$  et  $v$  forment une famille libre.

2. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$  et l'ensemble  $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$ .

- Montrer que  $F$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
- Écrire  $F$  sous la forme  $\text{vect}(u)$  avec  $u$  un vecteur de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .  
(Indication : Résoudre le système  $AX = 0$ ).

## Exercice 2 - ECRICOME 2020 ECE

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \geq 0, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$$

### Partie A : Étude de la fonction $f_n$

Dans cette partie, on fixe un entier naturel  $n$  non nul.

- Démontrer que la fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et :

$$\forall x \geq 0, f'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

- Étudier les variations de  $f_n$ .
- Démontrer que  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+$ , et calculer sa dérivée seconde.  
En déduire que  $f_n$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Démontrer :  $\forall t \geq 1, t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$ .
  - Montrer alors :  $\forall x \geq 1, f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x-1)^2$ .
  - En déduire la limite de  $f_n(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- Calculer  $f_n(0)$ , puis démontrer :  $f_n(1) < 0$ .
- Démontrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.  
On note  $x_n$  cette solution.

## Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite  $(x_n)$ , où pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $x_n$  est l'unique solution strictement positive de l'équation :  $f_n(x) = 0$ .

On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \frac{2n+2}{2n+1}$$

1. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1} \left( \frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

2. (a) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq \frac{2n+2}{2n+1}, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ .  
 (b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) \geq 0$ .  
 (c) Montrer alors que la suite  $(x_n)$  est décroissante, puis qu'elle est convergente.
3. (a) Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$  :  $-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$ .  
 (b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 4.b) de la partie A, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de  $x_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

## Exercice 3 - ECRICOME ECE 2018

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance  $n$  fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à  $p$  ( $p \in ]0, 1[$ ), et celle d'obtenir Face est de  $1 - p$ .

On notera  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et  $G$  la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera  $A$  l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $G$  est positive.

### Partie I

Dans cette partie, on suppose que  $n = 3$  et  $p = \frac{2}{3}$ .

1. Reconnaître la loi de  $X$  et vérifier que :  $P(A) = \frac{13}{27}$ .
2. Montrer que :  $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$ , puis expliciter la loi de  $G$ .
3. Calculer l'espérance de  $G$ . Le jeu est-il favorable au joueur ?

## Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où  $n$  est entier naturel non nul et  $p \in ]0, 1[$ .

Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur  $p$  et  $n$  pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit  $Y$  la variable aléatoire définie par :  $Y = (-1)^X$ .

Autrement dit,  $Y$  prend la valeur 1 lorsque  $X$  prend une valeur paire, et  $Y$  prend la valeur  $-1$  lorsque  $X$  prend une valeur impaire.

1. (a) On note  $Z = \frac{Y+1}{2}$ . Déterminer  $Y(\Omega)$ , puis montrer que  $Z$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $P(A)$ .
- (b) Démontrer que :  $E(Y) = 2P(A) - 1$ .

2. (a) Donner la loi de  $X$ .

(b) En déduire que l'on a également : 
$$E(Y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$
 puis que :  $E(Y) = (1-2p)^n$ .

3. Exprimer alors la valeur de  $P(A)$  en fonction de  $n$  et  $p$ .
4. Démontrer que

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[ p \leq \frac{1}{2} \text{ OU } \ll n \text{ est pair } \gg \right]$$

## Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que  $P(A) \geq \frac{1}{2}$ ), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que  $E(G) \leq 0$ ).

1. Exprimer  $G$  en fonction de  $X$  et  $Y$ . En déduire que : 
$$E(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k P(X = k).$$

2. Démontrer que :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ .

3. Montrer que :  $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$

4. Démontrer alors que :

$$\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}$$

5. (a) Étudier la fonction  $f$  définie sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  par :  $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad f(x) = x(1-2x)^{n-1}$ .

- (b) Pour une valeur de  $n$  fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à  $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

## Exercice 4 - Inspiré ESSEC

L'objectif du problème est d'étudier les rudiments de la théorie de la communication - ou théorie de l'information - introduite en 1948 par Claude Shannon.

### Définitions et notations

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$  désigne un espace probabilisé.

$\varphi$  est la fonction définie sur  $]0, 1]$  par  $x \mapsto \varphi(x) = -\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ .

Pour un événement  $A$  de probabilité non nulle, on pose  $i(A) = \varphi(P(A))$ .

$h$  est la fonction définie sur  $[0, 1]$  par

$$h(0) = 0 \quad \text{et pour } x \in ]0, 1], \quad h(x) = -x \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Pour une variable aléatoire  $X$  discrète définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  à valeurs réelles, on pose sous réserve d'existence :

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x))$$

Si  $X$  est à valeurs dans un ensemble fini  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , alors  $H(X)$  existe et, en notant  $p_k = P(X = x_k)$ , on a :

$$H(X) = \sum_{k=1}^n h(P(X = x_k)) = \sum_{k=1}^n h(p_k)$$

*Remarque : En théorie de l'information,  $i(A)$  est appelé incertitude de l'événement  $A$  et  $H(X)$  est l'incertitude moyenne - ou entropie - de  $X$ .*

### Partie I : Incertitude des événements

1. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit  $A$  l'événement " la carte tirée est la dame de cœur ".

Que valent  $P(A)$  et  $i(A)$  ?

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On lance  $n$  fois une pièce équilibrée.

$A$  est l'événement " obtenir  $n$  fois PILE ". Préciser  $i(A)$ .

3. Vérifier les points suivants :

(i) Pour un événement  $\Omega'$  quasi-certain :  $i(\Omega') = 0$ .

(ii) Si  $A$  et l'événement contraire  $\bar{A}$  sont équiprobables, alors  $i(A) = 1$ .

(iii) Si  $A$  et  $B$  sont indépendants pour la probabilité  $P$  et si  $P(A \cap B) \neq 0$ , alors  $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$ .

4. Préciser  $i(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$  quand les événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont mutuellement indépendants et  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$ .

En déduire une nouvelle démonstration de la question 2.

5. Soit  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $A \subset B$  et  $P(A) \neq 0$ . Comparer  $i(A)$  et  $i(B)$ .

6. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$  et quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

**Partie II : Incertitude d'une variable aléatoire discrète**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $U_n$  suit la loi uniforme sur  $\{1, 2, \dots, n\}$ , que vaut  $H(U_n)$ ?
2. Si on suppose  $P(Z = 1) = 1/4$ ,  $P(Z = 2) = 1/4$  et  $P(Z = 3) = 1/2$ , que vaut  $H(Z)$ ?  
Comparer  $H(Z)$  et  $H(U_3)$ .
3. On se propose de simuler informatiquement une variable aléatoire. On rappelle que `(grand(1,1,'uin',1,j))` fournit au hasard un nombre élément de  $\llbracket 1, j \rrbracket$ .

```
function y = Essec()
    ini = (grand(1,1,'uin',1,3))
    if ini == 3 then
        y = (grand(1,1,'uin',1,2))
    else
        y = 3
    end
endfunction
```

On appelle  $Y$  le contenu de  $y$  après exécution du programme `Essec`.

Donner la loi de  $Y$ , calculer son espérance  $E(Y)$  et son incertitude  $H(Y)$ .

4. Vérifier que  $h$  est continue et positive sur  $[0, 1]$ .  
Est-elle dérivable en 0? Étudier  $h$  et dessiner sa courbe représentative.
5. Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini.  
Montrer que  $H(X) \geq 0$  avec égalité si, et seulement si,  $X$  est quasi-certaine.