Durée : 4 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

DEVOIR SURVEILLE N°4A

MATHÉMATIQUES

Samedi 22 Mai 2021 - De 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - Espaces Vectoriels

Les 2 questions sont indépendantes.

1. On considère l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix},\ y,z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel.
   (b) Déterminer 2 vecteurs u et v tel que $E = vect(u,v)$.
   (c) Montrer que les vecteurs u et v forment une famille libre.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$.
   (a) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
   (b) Écrire F sous la forme $vect(u)$ avec u un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (*Indication : Résoudre le système* $AX = 0$).

Exercice 2 - ECRICOME 2018 ECT

Partie I

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 4\ln(x)$$

1. Étudier le sens de variation de g, et vérifier que g admet un minimum sur $]0,+\infty[$ égal à $2(1-\ln(2))$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0,+\infty[$. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :
   $$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x}$$
   On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).
3. Déterminer la limite de f en 0 . Interpréter graphiquement le résultat.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Soit D la droite d'équation $y = \frac{x}{4}$. Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de(D). On montrera en particulier que (D) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A dont on calculera les coordonnées.
6. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
7. (a) Vérifier que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, on a : $f''(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}$.
   (b) Étudier la convexité de f. La courbe (C) possède-t-elle des points d'inflexion ?
8. On donne :
   $$\frac{1}{e} \simeq 0,4 \quad \sqrt{e} \simeq 1,6 \quad f(\sqrt{e}) \simeq 1,3 \quad f'(\sqrt{e}) \simeq 0,1$$
   Représenter la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D) dans un même repère orthonormé.

Partie II

1. Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par :
$$u(x) = (\ln(x))^2.$$
2. En déduire que $\displaystyle\int_1^e f(x)dx = \frac{e^2+11}{8}$.
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = \begin{cases} \frac{8}{e^2+11} f(x) & \text{si } x \in [1,e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (a) Montrer que h est une fonction positive.
   (b) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\int_1^e h(x)dx = 1$.
4. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$\int_1^e \ln(x)dx = 1$$
   (b) Déterminer alors la valeur de $\displaystyle\int_1^e xh(x)dx$.

Exercice 3 - Probabilités

Les questions sont toutes indépendantes.

1) Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète.

On dispose d'une urne contenant initialement 1 boule blanche et 1 boule rouge. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne, en ajoutant après chaque tirage une boule supplémentaire de la couleur tirée. On note B_i : "Le i-ième tirage amène une boule blanche", R_i : "Le i-ième tirage amène une boule rouge" et X la variable aléatoire donnant le numéro du tirage amenant la première boule rouge. Déterminer la loi de X.

2) Calculer si elle existe, l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = \frac{k-1}{k!}$$
Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et $E(X) = e$.

3) Calculer si elle existe, la variance d'une variable aléatoire discrète.

On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = \frac{k-1}{k!}$$
La variable aléatoire X admet-elle une variance. Si oui, en préciser la valeur.

4) Reconnaitre une loi usuelle

On prélève 10 boules avec remise dans une urne contenant 9 boules blanches et 1 boule noire indiscernables au toucher. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages ayant amené la boule noire.

1. Reconnaitre la loi de X, puis donner $X(\Omega)$ et expliciter $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
2. Donner sans calcul l'espérance et la variance de X.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux fois la boule noire lors des 10 tirages ?

5) Utiliser la formule des probabilités totales.

On dispose de n urnes ($n \geq 2$) notée $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne $\mathcal{U}_k$ contient k boules rouges et $n+1-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on y pioche une boule.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ?
2. On constate que la boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne $\mathcal{U}_k$?

Exercice 4 - ECRICOME ECE 2018

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $P(A) = \dfrac{13}{27}$.
2. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.
3. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

1. (a) On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$. Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
   (b) Démontrer que : $E(Y) = 2P(A) - 1$.

2. (a) Donner la loi de X.
   (b) En déduire que l'on a également : $E(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$,
   puis que : $E(Y) = (1-2p)^n$.
3. Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p.
4. Démontrer que
$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[p \leq \frac{1}{2} \text{ OU « } n \text{ est pair »}\right]$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $P(A) \geq \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $E(G) \leq 0$).

1. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que : $E(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k P(X = k)$.
2. Démontrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
3. Montrer que : $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$
4. Démontrer alors que :
$$\begin{cases} P(A) \geq \dfrac{1}{2} \\ \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}$$
5. (a) Étudier la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad f(x) = x(1-2x)^{n-1}$.
   (b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?