Durée : 4 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

DEVOIR SURVEILLE N°3

MATHÉMATIQUES

Samedi 13 Février 2021 - De 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - ECRICOME ECT 2018

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

— le premier tirage a lieu dans l'urne U ;

— tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;

— Si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant à lieu dans l'autre urne.

— Si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans la même urne.

Partie I - Étude de l'urne du n-ième tirage

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement « le n -ième tirage s'effectue dans l'urne U $\gg$. Puisque le premier tirage a lieu dans l'urne U, l'événement U_1 est certain : $P(U_1) = 1$.

1. Calculer $P(U_2)$.
2. Donner les valeurs de $P_{U_2}(U_3)$ et de $P_{\overline{U_2}}(U_3)$. En déduire $P(U_3)$.
3. (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, que valent $P_{U_n}(U_{n+1})$ et $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$?

   (b) En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:
$$P(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} P(U_n)$$

   (c) En posant la suite $u_n = P(U_n)$, déterminer alors la valeur de $P(U_n)$ en fonction de n.

   (d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n)$.

Partie II - Étude du nombre de boules blanches.

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. (a) Donner les valeurs de :
$$P_{[X_1=0]}\left(X_2=0\right), \quad P_{[X_1=0]}\left(X_2=1\right), \quad P_{[X_1=1]}\left(X_2=1\right) \quad \text{et} \quad P_{[X_1=1]}\left(X_2=2\right)$$
   (b) En déduire la loi de X_2.
   (c) Vérifier que $E\left(X_2\right)=\frac{19}{18}$.
3. On rappelle qu'en Scilab, l'instruction $ceil(k*rand())$ permet d'obtenir aléatoirement un nombre entre 1 et k. Recopier et compléter les lignes pointillés du script Scilab ci-dessous afin qu'il simule la variable aléatoire X_2 :

```
tirage1 = ceil(3*rand())
if tirage1 < 3 then
    res1 = 1
    tirage2 = ceil(4*rand())
    if tirage2 == 1 then res2 = 1
    else res2 = 0
    end
else
    res1 = 0
    tirage2 = ........
    if tirage2 < 3 then res2 = ......
    else res2 = ......
    end
end
X2 = res1 + res2
```

4. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, déterminer $X_n(\Omega)$.
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, calculer $P\left(X_n=0\right)$.
5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$ -ième boule s'effectuera dans U.
On admettra de même qu'après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre impair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$ -ième boule s'effectuera dans V.
6. À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:
$$P\left(X_{n+1}=1\right)=\frac{3}{4}\times P\left(X_n=1\right)+\frac{2}{3}\times P\left(X_n=0\right) \quad (R_1)$$
7. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n\times P\left(X_n=1\right)$ Déduire du résultat (R_1), que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1}=u_n+\frac{8}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n$$
8. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:
$$u_n=\frac{8}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$
   (b) En déduire, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $P\left(X_n=1\right)$ en fonction de n.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(X_n=1\right)$.

Exercice 2 - Matrices - ELSCA 1999

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

1. (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse. Comment peut-on obtenir avec Scilab, l'inverse de P afin de vérifier nos calculs ?

   (b) Montrer que $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. (a) Soit M une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels commutant avec A, c'est à dire telle que $A \cdot M = M \cdot A$.

   On pose $M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$. Montrer que $A' \cdot M' = M' \cdot A'$.

   Réciproquement, montrer que si M' commute avec A' alors la matrice M définie par $M = P \cdot M' \cdot P^{-1}$ commute avec A.

   (b) Déterminer l'ensemble des matrices commutant avec A'. (On écrira ces matrices avec des coefficients indéterminés)

   (c) En déduire la forme générale des matrice commutant avec A.

Exercice 3 - Analyse

Dans cet exercice, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction f par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad f(x) = \sqrt{x} \ln x$$

1. Justifier que f est continue $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, en précisant la valeur en 0 de la fonction prolongée. On appellera désormais f la fonction prolongée, définie sur $[0, +\infty[$.
3. Démontrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Est-elle dérivable en 0? Quelle est l'allure de la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$?
4. Donner le développement limité à l'ordre 1 en 1 de f.
5. Dresser le tableau de variations de f, en précisant valeurs et limites aux bornes.
6. Tracer la courbe représentative de la fonction f.
   On donne : $\mathrm{e}^{-2} \approx 0,14 \quad 2/e \approx 0,74$

Exercice 4 - Étude d'un polynôme et d'une suite

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 3 \quad \text{et} \quad P(x) = f(x) - x = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

On pose alors la suite (u_n) définie par $u_0 \in [1; 3]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Factoriser le polynôme $P(X) = X^3 - 5X^2 + 7X - 3$.
2. Déterminer sur quel ensemble,le polynôme P est négatif ou positif.
3. Donner le tableau de variation de la fonction f (on fera apparaitre les limites).
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; 3]$.

5. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
6. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
7. Écrire un script Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer un nombre u_0 et un nombre n et qui affiche le terme u_n de la suite.
8. On suppose dans cette question que $u_0 > 3$. Montrer que la suite (u_n) est alors divergente.

Problème - Suites implicites et polynôme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

Le but de ce problème est d'étudier l'équation $f_n(x) = 0$ et le comportement de la solution quand n tend vers $+\infty$

1. (a) Dresser le tableau de variations de f_n et montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n
   (b) Calculer u_1 et u_2.
   (c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]\, 0, \frac{2}{3}[$
2. (a) Montrer que pour tout réel x de $]0, 1\,[$, on a $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   (b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$ puis les variations de la suite (u_n).
   (c) Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. (a) Déterminer un encadrement de ${u_n}^n$ pour tout $n \geqslant 1$ et en déduire la limite de ${u_n}^n$ quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Donner enfin la valeur de ℓ.
4. On note $u_n = \frac{2}{3} + v_n$
   (a) Vérifier que v_n tend vers 0 .
   (b) Montrer que $\left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n + 9v_n^2 + 12v_n = 0$
   (c) En déduire que $v_n = \dfrac{-\left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n}{9v_n + 12}$
   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{-\frac{1}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1$.
5. Définir en Scilab la fonction f5, qui prend un réel x et calcule $f_5(x)$.
   Tracer en Scilab la courbe représentative de f_5 sur $[0, 10]$ (on prendra au moins 10000 points.