Durée : 4 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

DEVOIR SURVEILLE N°2

MATHÉMATIQUES

Samedi 12 Décembre 2020 - De 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - Étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

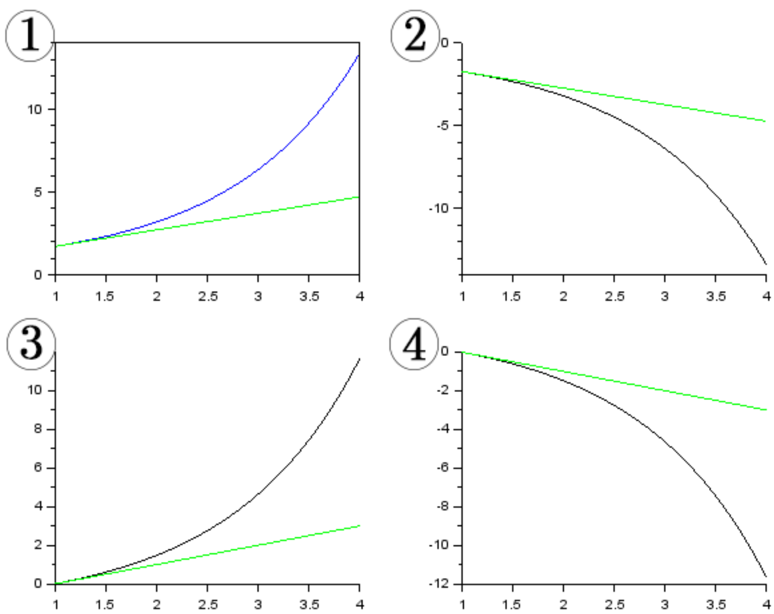
Dans toute cette partie, on s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{e^{u_n} - 1}{u_n}.$$

1. Montrer les relations suivantes
   (a)
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x - 1 \geq x$$
   (b) Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x - e^x + 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x - e^x + 1$
   (c) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xe^x - e^x + 1 \geq 0$$
2. On étudie dans cette partie la fonction $f : x \to \dfrac{e^x - 1}{x}$.
   (a) Justifier (très précisément) que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$.
   (b) Déterminer la dérivée de la fonction f et le signe de f'.
   (c) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$, 0 et $+\infty$.
   (d) Donner l'équation de la tangente à f en $x = 1$.
3. On cherche à tracer la fonction f sur l'intervalle $[1; 5]$ en utilisant Scilab.
   (a) Écrire une fonction scilab appelé f qui permettent d'obtenir le tracé de la fonction f sur [1 ;5] en utilisant plot(x,f).
   (b) Complétez le script suivant permettant de tracer le graphe de la fonction f sur $[1, 5]$ avec un pas de 0.01.

   ```
   clf
   x = ..............
   plot(x, f)
   ```

   (c) On aimerait sur le même graphique, tracée en rouge, la tangente de la fonction f en $x = 1$. Complétez votre programme qui permet d'obtenir ce résultat.
   (d) On donne 4 graphiques possibles. Écrivez sur votre copie le numéro du graphique correspondant à la fonction f en justifiant votre réponse.



4. On considère $u_0 = 1$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u_n est bien définie et que $u_n \geq 1$.
   (b) Démontrer que la suite est croissante. (Indice, utiliser la fonction f).
5. Écrire un script scilab qui pour un entier n donné par l'utilisateur, calcule puis affiche le n-ième terme de la suite.

Exercice 2 - Puissances de matrices

I - Cas d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = -2a_n \end{cases}$$

ainsi que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Résolution numérique

1. Recopier et compléter le programme scilab suivant permettant de calculer les termes a_{100} et b_{100}.

```
//initialisation
a = .........
b = .........

// calculs
for k = 1: ......
    temp = .........
    .... = 3*a + b
    b    = .........
end

// conclusion
disp('Le 100ème terme de la suite a est" + string(.......))
disp('Le 100ème terme de la suite b est" + string(.......))
```

Résolution en utilisant les suites

2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$
3. Déterminer a_n pour tout n entier.
4. En déduire b_n pour tout n entier.

Résolution en utilisant les matrices

5. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
6. Calculer $D = P^{-1}AP$.
7. En déduire D^n pour tout entier n.
8. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

9. Donnez pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n.
10. On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Déterminer une relation matricielle entre X_{n+1} et X_n.
11. Montrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$.
12. En déduire a_n et b_n pour tout n entier.

II - Cas d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on introduit les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif est de calculer B^n pour tout entier n.

1. Écrire un script Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer un nombre entier n et qui calcule et affiche B^n.
2. Calculer $B \times (B - I_3)^2$. Que peut-on en déduire sur l'inversibilité de la matrice B ?
3. Calculer $C(C - I_3)(2I_3 - C)$.
4. En déduire que C est inversible et déterminer C^{-1}.
5. Montrer que $B = C^{-1} \times T \times C$.
6. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 - Probabilité - ECRICOME 2011

PARTIE I. Un jeu en ligne.

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.
Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

— H : "les trois jetons sont alignés horizontalement " .

— V :" les trois jetons sont alignés verticalement " .

— D : " les trois jetons sont alignés en diagonale " .

— N : " les trois jetons ne sont pas alignés " .

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
2. Déterminer les probabilités $\mathrm{P}(H)$, $\mathrm{P}(V)$, $\mathrm{P}(D)$ des événements $H, .V, .D$.
3. En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à :

$$\mathrm{P}(N) = \frac{19}{21} \simeq 0.9048$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.
   (a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{ème}$ relance. Calculer l'espérance mathématique $E(Z_i)$ de Z_i .
   (b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ?

PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un Joueur décide de ,jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.
   (b) Indiquer l'espérance et la variance de X.
   (c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X.
2. Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ? (On admettra que $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \simeq -0,1$ et $\ln(2) \simeq 0,7$)

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement "la fonction aléatoire est déréglée" et on pose $\mathrm{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}_\Delta(H)$, $\mathrm{P}_\Delta(V)$, $\mathrm{P}_\Delta(D)$ des événements H, V, D sachant l'événement Δ.
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ pour en déduire que la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égal à :

$$\mathrm{P}(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$$

3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de x pour que l'espérance de gain soit positive.
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée ?

Exercice 4 - Sommes

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 . Le but de cet exercice est de calculer la somme :

$$S=\sum_{p=0}^{n} p^{2}\binom{2n}{2p}$$

Pour cela on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}$$

1. (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. (f'' est la dérivée seconde de f, c'est à dire la dérivée de f')
   (b) En déduire $f'(1)$ et $f''(1)$
2. (a) Rappeler la formule du binôme de Newton pour $(1+x)^{2n}$ et $(1-x)^{2n}$. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=2 \sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p} x^{2p}$$

   (b) En déduire des expressions sous forme de sommes de $f'(1)$ et $f''(1)$
3. En remarquant que $p^{2}=\frac{1}{4} 2p(2p-1)+\frac{1}{4} 2p$, déduire une expression de S en fonction de n.