Durée : 4 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

DEVOIR SURVEILLE N°1

MATHÉMATIQUES

Samedi 3 Octobre 2020 - De 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 (Calculs de puissances)

1. Écrire les expressions suivantes sous la forme bx^a avec $b, a \in \mathbb{R}$.

   (a) $A = x^4 \times (3x)^{-2}$ (b) $B = \dfrac{x^3 \times x^{-5}}{x^4}$ (c) $C = (4x)^2 \times (x^3)^3$

2. Simplifier l'expression suivante $D = 2^n + 2^n + 2^n + 2^n$.
3. Écrire l'expression suivante sous la forme bx^a : $E = \dfrac{x^{n+1}}{x^n(-x)^{-2n}}$
4. Écrire l'expression suivante sous la forme x^a : $F = \sqrt{x} \times \dfrac{x^2}{(-\sqrt{x})^4 x^{-5}}$

Exercice 2 (Logarithme et exponentielle)

1. Exprimer $A = 3\ln(8) - 5\ln(18) + 10\ln(12)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.
2. Simplifier l'expression $B = 2\ln\left(x^4\right) + \ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$
3. Exprimer $C = 5\ln\left(\frac{9}{15}\right) - 4\ln\left(\frac{3}{25}\right) + 8\ln\left(\frac{5}{9}\right)$ en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(5)$
4. Simplifier l'expression $D = \ln\left(\dfrac{\sqrt{7}+2}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{7}-2}{2}\right)$.
5. Simplifier l'expression $E = \exp(3\ln(2))$.
6. Simplifier l'expression $F = \ln\left(e^{x^3+2x}\right) - e^{3\ln(x)} + \ln(1)$

Exercice 3 (Démonstration par récurrence)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^n \geq n+1$. On rappelle que $e \approx 2,7$.

Exercice 4 (Étude de fonctions)

Soient f et g les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x}{x+2}$$

On note h la fonction définie sur ce même intervalle par $h(x) = f(x) - g(x)$

1. Déterminer les limites des fonctions f et g en $+\infty$ (on pourra montrer que $\forall x \in [0, +\infty[, g(x) = \frac{2}{1+\frac{2}{x}}$)
2. Étudier les variations de h. En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \geqslant g(x)$.
3. Montrer que les courbes représentatives de f et g admettent une tangente commune en $x = 0$.
4. Tracer dans un même repère les deux courbes ainsi que la tangente en question.
5. On définit désormais, pour tout réel α strictement positif, la fonction f_α par

   $$f_\alpha(x) = \ln(1+x) - \alpha x$$

   Étudier les variations de la fonction f_1.
6. Montrer que si $\alpha \geqslant 1$, on a $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \leqslant \alpha x$
7. Existe-t-il des $\alpha \in]0, 1[$ tels que $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \leqslant \alpha x$?

Exercice 5
On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \text{ et } g(x) = -\frac{x+1}{x-2}$$

1. Donner les domaines de définitions de f et de g.
2. On note $a = \dfrac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}$
   (a) Déterminer $g(a)$
   (b) Que vaut $f(g(a))$? On donnera le résultat en fonction de a
   (c) Simplifier l'expression de a.
   (d) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Que vaut $f(g(x))$? On simplifiera l'expression au maximum.
3. Vérification Scilab dans la console :
   (a) Écrire la ligne de code permettant d'entrer la valeur de a que l'on placera dans une variable a.
   (b) Écrire la ligne de code permettant de calculer $g(a)$ et de l'enregistrer dans une variable b. (en utilisant la définition de g).
   (c) Écrire la ligne de code permettant de calculer $f(g(a))$.
4. Écrire un script Scilab qui
   — demande à l'utilisateur d'entrer un nombre x et le place dans une variable x.
   — Si x est plus grand ou égal à 0, le programme calcule $f(x)$ et donne le résultat.
   — Si x est strictement plus petit que 0, le programme calcule $g(x)$ et donne le résultat.

Exercice 6 (Étude d'une suite)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$. Calculer u_3.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$
   (c) En déduire sans récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n \geqslant n$
   (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Dans cette question, on pose pour tout entier naturel n : $v_n = n + u_n$
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de n et u_n.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et donner une formule explicite de v_n, en fonction de n uniquement.
   (c) Montrer enfin que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2^n - n$.
3. Démontrer qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}-1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

Exercice 7
Le but de cet exercice est de résoudre l'équation

$$a^b = b^a$$

où a et b sont des entiers strictement positifs tels que $a < b$

1. Montrer que l'équation $a^b = b^a$ est équivalente à $f(a) = f(b)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
2. Faire l'étude de la fonction f et dresser son tableau de variations (on admettra que sa limite quand x tend vers $+\infty$ vaut 0). Tracer la courbe de f Montrer que f admet un maximum global en un point que l'on précisera.
3. Quelles sont les valeurs possibles de a?
4. Résoudre l'équation $1^b = b^1$.
5. Résoudre l'équation $2^b = b^2$.
6. Conclure en donnant l'ensemble de tous les couples (a, b) où a et b sont des entiers strictement positifs vérifiant $a^b = b^a$ et $a < b$