
Durée : 4 heures

Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

DEVOIR SURVEILLE N°0

MATHÉMATIQUES

Mercredi 2 Septembre 2020 - De 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 (Calcul littéral et fractions)

- Développer et réduire l'expression $A = (n(n+1))^2 - n(n+1)(2n+1)$.
- Factoriser l'expression $B = (n(n+1))^2 - n(n+1)(2n+1)$.
- Factoriser l'expression $C = (x+4)^2 + 2(2x+1)(x+4) + (2x+1)^2$.
- Écrire sous la forme la plus simple possible la fraction suivante $D = \frac{(x^3 - x^2)(4 - 12x)}{x^2(1 - 3x)}$.
- Additionner et simplifier la fraction suivante $E = \frac{3x}{4(x+2)(x^2+1)} - \frac{3}{2(x^2+1)(x-1)}$.
- Écrire la fraction $\frac{4x^2+3}{x}$ sous la forme $ax + \frac{b}{cx}$.

Exercice 2 (Racines carrées et $|\cdot|$)

- Écrire l'expression de $A = \sqrt{1200}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible.
- Simplifier au maximum l'expression $B = (\sqrt{2} + 6)(\sqrt{2} - 6)$.
- Exprimer sans valeur absolue les quantités $C = |-12|$ et $D = |5|$.
- Simplifier cette fraction en supprimant la racine carrée du dénominateur $E = \frac{x}{\sqrt{x-4}}$.
- Simplifier l'expression suivante : $F = \frac{2}{\sqrt{x-2}} - \frac{3}{\sqrt{x+2}}$

Exercice 3 (Puissances)

- Écrire les expressions suivantes sous la forme bx^a .

(a) $A = x^3 \times (2x)^{-2}$

(b) $B = \frac{x^2 \times x^{-4}}{x^3}$

(c) $C = (3x)^2 \times (x^5)^4$

- Simplifier l'expression suivante $D = 3^n + 3^n + 3^n$.
- Écrire l'expression suivante sous la forme x^a : $E = \frac{x^{-1}}{(-x)^3 x^{-2}}$
- Écrire l'expression suivante sous la forme x^a : $F = \sqrt{x} \times \frac{x^3}{(-\sqrt{x})^6 x^{-2}}$

Exercice 4 (Équations et inéquations)

- Résoudre l'équation $2x^2 - 3x = -1$.
- Résoudre l'équation $(3x-2)^2 - (2x+4)(3x-2) = 0$.
- Résoudre l'équation $(e^x - 1)(3 - e^{2x}) = 0$.
- Résoudre l'inéquation $\frac{3x}{5} - \frac{2}{3} \leq -\frac{x}{15}$.
- Résoudre l'inéquation $4x^2 - 2x \geq 0$
- Résoudre l'inéquation $e^x \geq x$.

Exercice 5 (Logarithme et exponentielle)

- Exprimer $A = 3 \ln(45) - 5 \ln(75) + 18 \ln(15)$ en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(5)$.
- Simplifier l'expression $B = 2 \ln(x^3) + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$
- Exprimer $C = 5 \ln\left(\frac{9}{4}\right) - 4 \ln\left(\frac{3}{8}\right) + 8 \ln\left(\frac{2}{9}\right)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$
- Simplifier l'expression $D = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right) + \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.
- Simplifier l'expression $E = \exp(-2 \ln(2))$.
- Simplifier l'expression $F = \ln(e^{x^2+1}) - e^{2 \ln(x)} + \ln(e)$

Exercice 6 (Fonctions)

Soit une fonction r définie sur $]0; 12]$ par

$$r(x) = (900x)e^{-0,1(x-2)}.$$

A. Étude d'une fonction f

- On considère la fonction f définie sur $]0; 12]$ par $f(x) = \ln[r(x)]$.
Démontrer que $f(x) = \ln(900) + \ln x - 0,1(x-2)$.
- On note f' la fonction dérivée de f ; démontrer que $f'(x) = \frac{10-x}{10x}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de $]0; 12]$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]0; 12]$.
- On désigne par r' la fonction dérivée de r ; exprimer f' en fonction de r' et de r puis justifier que $r'(x)$ et $f'(x)$ ont le même signe pour tout x de $]0; 12]$.
- En déduire les variations de r sur $]0; 12]$.
- Déterminer pour quelle valeur x_0 la fonction r atteint un maximum et calculer x_0 (on donnera la valeur exacte).

B. Calcul de la valeur moyenne

- Démontrer que la fonction R définie par

$$R(x) = -9\,000(x+10)e^{-0,1(x-2)}$$

est une primitive de la fonction r sur $]0; 12]$.

- Calculer la valeur moyenne r_m de la fonction r sur $]0; 12]$ définie par

$$r_m = \frac{1}{12} \int_0^{12} r(x) dx.$$

On donnera la valeur exacte.

Exercice 7 (Probabilités)

Une roue de loterie comporte trois secteurs notés A, B et C.

On lance la roue, elle tourne puis s'arrête devant un repère fixe.

Le mécanisme est conçu de telle sorte que, à l'arrêt de la roue, le repère fixe se trouve toujours devant l'un des trois secteurs, qui est alors déclaré « secteurs repéré ».

On note p_1 la probabilité que le secteur A soit repéré. On donne $p_1 = 0,2$.

On note p_2 la probabilité que le secteur B soit repéré. On donne $p_2 = 0,3$.

- Calculer la probabilité, notée p_3 , que le secteur C soit repéré.

Une **partie** consiste à lancer la route deux fois successivement. On s'intéresse aux couples de secteurs repérés obtenus à la suite des deux lancers successifs.

On admet que les lancers de roues successifs sont indépendants.

- Justifier que la probabilité d'obtenir le couple de secteurs repérés (A, B) est égale à 0,06.
- Compléter le tableau suivant par les probabilités d'obtenir les différents couples de secteurs repérés possibles. Certaines probabilités sont déjà indiquées, ainsi la probabilité de tenir le couple (C, C) est égale à 0,25.

| Secteur repéré au premier lancer | A | B | C |
|----------------------------------|------|---|------|
| A | 0,04 | | |
| B | 0,06 | | |
| C | | | 0,25 |

4. Montrer que la probabilité de tenir un couple de secteurs repérés ne comportant pas le secteur C est égale à 0,25.
5. De l'argent est mis en jeu dans cette partie. Le gain dépend du nombre de secteurs C repérés :
- obtenir deux fois le secteur C fait gagner huit euros ;
 - obtenir exactement une fois le secteur C fait gagner un euro ;
 - d'obtenir aucun secteur C fait perdre dix euros.

(a) Recopier sur la copie et compléter le tableau suivant :

| | | | |
|-----------------|-----|---|---|
| Gain (en euros) | -10 | 1 | 8 |
| Probabilité | | | |

(b) Calculer le gain moyen que l'on peut espérer à ce jeu. Interpréter ce résultat.

Exercice 8 (Suites)

Dans cet exercice, on cherche à trouver une formule explicite pour les suites de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont deux nombres réels.

1. **Cas où $a = 1$** : On s'intéresse dans cette partie au cas où $a = 1$, c'est à dire aux suites de la forme $u_{n+1} = u_n + b$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Quel est ce type de suite ?

(b) Recopiez et complétez le programme suivant permettant de calculer le 50^{ème} terme de la suite $u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 1$.

```

L1 : Variables          u un réel, n un entier, b un réels
L2 : Initialisation    u prend la valeur .....
L3 :                   n prend la valeur .....
L4 :                   b prend la valeur .....
L5 : Traitement        Pour k allant de .... à .... faire
L6 :                   u prend la valeur .....
L7 :                   Fin Pour
L8 : Résultat          Afficher u

```

(c) Déterminez l'expression de u_n en fonction de n , de b et de u_0 .

2. **Cas où $b = 0$** : Dans cette partie, on s'intéresse aux suites de la forme $u_{n+1} = au_n$ et $u_0 > 0$.

(a) Quel est ce type de suite ? Déterminez l'expression de u_n en fonction de n , de a et de u_0 .

(b) Quelle est la limite de la suite (u_n) selon les valeurs de a ?

(c) Dans cette question $a = 0.5$ et $u_0 = 2$. Recopiez et complétez le programme suivant afin qu'il donne le plus petit entier n tel que $u_n < 0.0001$.

```

L1 : Variables          u un réel, n un entier, a un réel
L2 : Initialisation    u prend la valeur .....
L3 :                   n prend la valeur .....
L4 :                   a prend la valeur .....
L5 : Traitement        Tant que ..... faire
L6 :                   u prend la valeur .....
L7 :                   n prend la valeur .....
L8 :                   Fin Tant que
L9 : Résultat          Afficher n

```

3. **Un cas particulier** : On considère la suite $u_{n+1} = -2u_n + 3$ et $u_0 = 2$.
- (a) Résoudre l'équation $x = -2x + 3$, on notera la solution α (alpha).
 - (b) On pose la suite $v_n = u_n - \alpha$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer sa raison ainsi que v_0 .
 - (c) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .
 - (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 - (e) Quelle est la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?
4. **Le cas général** : On considère que $a \neq 1$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On revient au cas de la suite $u_{n+1} = au_n + b$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.
- (a) Résoudre l'équation $x = ax + b$. On notera α la solution de cette équation.
 - (b) On introduit la suite $v_n = u_n - \alpha$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - (c) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n , a , b et de u_0 .
 - (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n , a , b et de u_0 .

Exercice 9 (Réflexion)

Cet exercice est à traiter après avoir fait tous les autres. Résoudre l'équation suivante d'inconnues x :

$$x = ax^2 + (1 - a)$$

avec $a > \frac{1}{2}$. On pourra poser $r = \frac{1 - a}{a}$.