A rendre pour le 27 Janvier 2021

Exercice 1 - Fonctions et polynômes - Obligatoire pour les groupes 9 et 10

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x-1+\ln(x)}{x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. On introduit la fonction auxiliaire g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$ et P la fonction polynôme déterminée par $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 3x^3 - x - 2$.
   (a) Montrer que le polynôme P se factorise par $(x-1)$.
   (b) Déterminer les 3 réels a, b, c tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
   (c) En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.
   (d) Exprimer g' en fonction de P, calculer les limites de g aux bords de son domaine de définition puis dresser le tableau de variations de g.
   (e) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) > 0$.
3. Étude de la fonction f :
   (a) Vérifier que la fonction dérivée f' peut s'écrire : $\forall x \in Df; f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
   (b) En déduire les variations de f.

Exercice 2 - Obligatoire pour les groupes 5 à 10

On donne les approximations suivantes qui vous serviront au cours de l'exercice :

$$\ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25 \qquad 22\ln(3) - 23 \approx 1,17$$

$$\frac{1}{22\ln(2) - 14} \approx 0,80 \qquad \frac{1}{22\ln(3) - 23} \approx 0,86$$

Préliminaire : Polynôme et étude de signe

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par $X - 1$.
2. Factoriser P.
3. En calculant, pour $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\dfrac{2P(e^x)}{e^x}$ de deux manières différentes et en utilisant ce qui précède, justifier qu'on a l'égalité :

$$2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x} = \frac{2(e^x-1)(e^x-2)(e^x-3)}{e^x}$$

4. Déduire des questions précédentes le signe de $2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ en dressant le tableau de signe.

Étude d'une fonction

On pose $v : x \to e^{2x} - 12e^x + 22x + 12e^{-x}$ et $h : x \to \dfrac{1}{v(x)}$.

1. Étude de v.
   (a) Calculer les valeurs exactes de $v(\ln(2))$ et de $v(\ln(3))$ en détaillant les calculs.
   (b) Justifier proprement les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction v.
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction v.
   (d) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) > 0$.
2. Quel est l'ensemble de définition de h ?
3. Dresser le tableau de variation de h.

Exercice 3 - Obligatoire pour les groupes 1 à 8

Préliminaires

On définit une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad R_1(x) = x \qquad R_2(x) = x^2 - 2$$

et pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x)$$

1. Déterminer les polynômes R_3 et R_4.
2. Quels sont les degrés de R_1, R_2, et R_3 ? Quels sont leurs coefficients dominants ?
3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose $y = x + \dfrac{1}{x}$. Calculer $R_1(y)$, $R_2(y)$ et $R_3(y)$.
4. Montrer par récurrence double que, pour tout entier $k > 0$, R_k est un polynôme de degré k vérifiant pour tout réel x non nul, l'égalité
$$R_k(x + \frac{1}{x}) = x^k + \frac{1}{x^k}$$

Un exemple particulier

On pose Q le polynôme défini par $Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1$.

1. On veut écrire Q en utilisant le symbole $\sum$: $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$. Que vaut alors n ? Que valent les a_k ?
2. Vérifier que pour tout $k \in [|0, 6|]$, on ait $a_k = a_{6-k}$.
3. Vérifier que 0 n'est pas racine de Q.
4. Vérifier que Q peut s'écrire sous la forme $Q(x) = a_3x^3 + \displaystyle\sum_{k=0}^{2} a_k(x^k + x^{6-k})$. (Expliciter les a_k et écrire cette somme en extension)
5. Calculer alors $\dfrac{Q(x)}{x^3}$.
6. Montrer que $\dfrac{Q(x)}{x^3} = 2 + R_3(y) + R_2(y) - 9R_1(y)$. (On rappelle que $y = x + \dfrac{1}{x}$ et que les $R_k(y)$ ont été calculés dans la partie 1).

7. On pose $\tilde{Q}(y) = 2 + R_3(y) + R_2(y) - 9R_1(y)$. Montrer que

$$\tilde{Q}(y) = (y^3 - 3y) + (y^2 - 2) - 9y + 2$$

8. Résoudre $\tilde{Q}(y) = 0$.
9. En déduire alors que résoudre $Q(x) = 0$ est équivalent à résoudre pour tout réel x non nul, $x + \frac{1}{x} = 3$ et $x + \frac{1}{x} = -4$.
10. Conclure sur les racines de Q.

Exercice 4 -Inspiré d'INSEEC 2002 - Obligatoire pour les groupes 1 à 4

On définit pour tout entier naturel n non nul, le polynôme P_n par : $P_0(X) = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1}(X) = X^3 P_n'(X) + (2 - 3(n+1)X^2)P_n(X) \tag{1}$$

1. Étude des polynomes
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(0) = 2^{n+1}$
   (b) Calculer $P_1(X)$ en utilisant la relation (1) et déterminer ses racines.
   (c) Montrer que $P_2(X) = 24X^4 - 36X^2 + 8$ et déterminer ses racines.
   (d) Montrer par récurrence que le polynôme P_n est de degré $2n$.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$
   (a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

   $$f'(x) = \frac{P_1(x)}{x^6} e^{-1/x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{P_2(x)}{x^9} e^{-1/x^2}$$

   (b) En déduire les intervalles sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante. Tracer son tableau de variation.
   (c) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est convexe ou concave.
   On rappelle qu'une fonction 2 fois dérivables est convexe (resp concave) si et seulement si $f''(x) > 0$ *(resp.* $f''(x) < 0$*)*
   (d) Conjecturer une formule pour la dérivée n-ème de f notée $f^{(n)}(x)$.
   (e) Démontrer cette formule par récurrence.
3. En scilab, un polynôme peut être modélisé par une matrice ligne ne comportant que les coefficients du polynôme. Ainsi la matrice $[2, 3, 5]$ correspondra au polynôme $P(X) = 2 + 3X + 5X^2$.
   (a) A quel polynôme correspondra la matrice $[1, 0, 2, 4]$?
   (b) Écrire $P_1(X)$ et $P_2(X)$ des questions $1(b)$ et $1(c)$ en Scilab.
   (c) Si un polynôme est de degré n, quelle sera la taille de sa matrice associée en Scilab ?
   (d) Compléter la fonction suivante qui pour un polynôme quelconque, permet d'obtenir le polynôme dérivée :

```
function Q = derive(P)
    n = size(P) \\permet d'obtenir la taille de la matrice P
    if n == 1
        Q = [.....]
```

```
    else
        Q = zeros(1,......)
        for k = 1 : ......
            Q(k) = ............
        end
    end
endfunction
```