

A Faire en autonomie

Exercice 1 - Inspiré ECRICOME 2018**Partie I**

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

- (a) Calculer $A^2 - 7A$.
 (b) Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.
 (c) Résoudre l'équation $X^2 - 7X + 12 = 0$.
 (d) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Déterminer les solutions des systèmes suivants :

$$E_3 : (A - 3I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$E_4 : (A - 4I_3)X = 0$$

2. On considère désormais les matrices : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) La matrice B est-elle inversible. Déterminer son inverse le cas échéant.
 (b) Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
 (c) Montrer que $D_2 = P^{-1} B P$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
 (d) Montrer que la matrice $D_1 = P^{-1} A P$ est également diagonale.

Partie II

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n$.

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = P^{-1}X_n$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n$.

2. Pour tout entier naturel n , on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+2} = \frac{1}{2} a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n \\ b_{n+2} = \frac{1}{2} b_{n+1} \\ c_{n+2} = \frac{2}{3} c_{n+1} + \frac{1}{3} c_n \end{cases}$$

3. Calculer les matrices Y_0 et Y_1 .
4. Pour tout entier naturel n , calculer a_n , b_n et c_n en fonction de n .
5. En déduire l'expression de X_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .

On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$$

6. (a) Compléter le script ci-dessous qui demande d'entrer un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice X_n :

```
n = .....
Xold=[3;0;-1]
Xnew=[3;0;-2]
A= ..... // Ecrire la matrice A
B= ..... // Ecrire la matrice B
for i=2:n
    Aux= .....
    Xold=.....
    Xnew=.....
end
res=.....
disp(res)
```

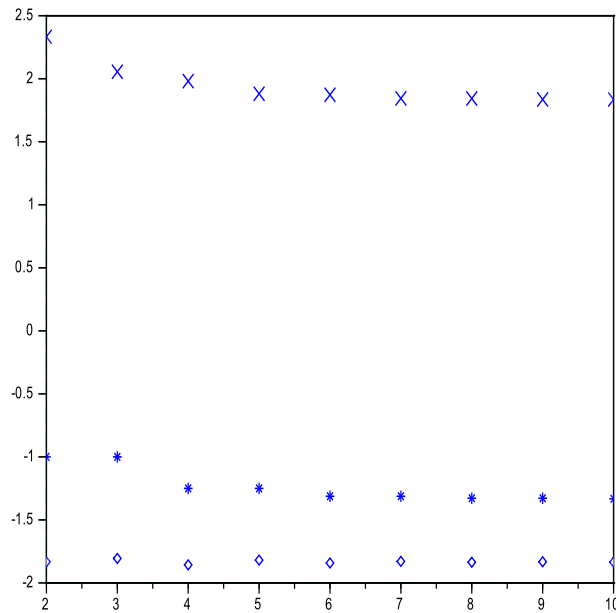
- (b) La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement (voir figure 1) les valeurs de α_n , β_n et γ_n en fonction de n . Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.

Exercice 2 - Inspiré ECRICOME ECT 2004

L'exercice se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La fonction f étant définie sur \mathbb{R} par : pour tout x réel, $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.



Étude d'une fonction g intermédiaire.

On considère la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall t \geq 0, \quad g(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1+t)$$

1. Montrer que la fonction g est continue sur \mathbb{R}_+ .
2. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
3. Déterminer la fonction dérivée g' de g et en donner son signe sur \mathbb{R}_+ .
4. En déduire les variations de la fonction g et montrer que : $\forall t \geq 0, g(t) \leq 0$.

Étude de la fonction f .

5. Démontrer que l'on a, pour tout x réel : $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$
6. Déterminer les limite de f en $-\infty$ et $+\infty$
7. Étudier alors les variations de la fonction f et tracer son tableau de variation.
8. Sachant que $\ln 2 \simeq 0.69$ et que $\frac{\ln(1+e)}{e} \simeq 0.48$, montrer que l'on a, pour tout x de l'intervalle $[0, 1]$:

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

9. Compléter le script suivant qui permet de tracer la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$ (on prendra 1000 points en abscisses).

```
function .....
    y = .....
    .....
```

```
x = .....
plot(x,f)
```

Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

10. Écrire un script Scilab qui pour un entier n donné par l'utilisateur calcule et affiche u_n
11. Justifier que pour tout x de $[0, 1]$:

$$|f'(x)| \leq |g(e)|$$

12. On considère la fonction h définie sur $[0, 1]$ par : $h(x) = f(x) - x$.
13. Montrer que h est une fonction strictement décroissante sur $[0, 1]$.
 - (a) Prouver que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$.
 - (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0, 1]$.
14. Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

Exercice 3 - ECRICOME 2017

Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k -ième tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5, 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A - Études de cas particuliers

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
 (b) Calculer $P(T_n = 1)$.
 (c) Montrer que :

$$P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2 .
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3 . Vérifier que $E(T_3) = \frac{16}{9}$.

Partie B - Étude de l'espérance dans le cas général

1. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
 (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1} .

- (b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k , démontrer alors que :

$$\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$

3. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
- (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

- (c) Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note \mathcal{H}_k la proposition :

$$\ll \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \gg.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, \mathcal{H}_k est vraie.

4. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.
- (b) En déduire que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$.
5. Démontrer que $E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$, puis que $E(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
6. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$ (Indication : On pourra utiliser les formules que l'on connaît sur les fonctions).

Partie C - Étude Scilab

1. On rappelle que la fonction $rand()$ en Scilab permet d'obtenir un nombre réel entre 0 et 1. Que permet la commande :

```
X = ceil(n*rand())
```

On considère désormais que l'expression précédente donne une modélisation de la variable aléatoire X_k .

2. Écrire un script Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer un nombre n et permet d'afficher une modélisation de $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$
3. Modifier le Script Scilab précédent pour qu'il affiche également une modélisation de T_n .