A Faire en autonomie

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines positives de l'équation $e^x = x^n$que l'on note (E_n). A cet effet on introduit la fonction $f_n$définie par

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

1. Etude des racines positives des équations (E_1) et (E_2)
   (a) Etudier et représenter sur $[0, +\infty[$ les fonctions f_1 et f_2
   (b) Etudier l'existence de racines positives pour les équations (E_1) et (E_2). On rapelle que $2 < e < 3$
   (c) Écrire un script scilab permettant de représenter les fonctions f_1 et f_2 sur $[0; 5]$ avec un pas $h = 0.01$.
2. Etude des racines positives de l'équations (E_3)
   (a) Etudier et représenter sur $[0, +\infty[$ la fonction f_3. On donne les valeurs approchées : $e^2 \simeq 7,4;\ e^3 \simeq 20,1;\ e^4 \simeq 54,6;\ e^5 \simeq 148,4$
   En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que $1 < u < v$, et encadrer chacunes d'elles par deux entiers consécutifs.
   (b) Soit la suite définie par la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et la condition initiale y_0,où y_0 est un nombre réel strictement supérieur à u.
   — Montrer que si $u < y_0 \leq v$, alors pour tout entier naturel $n,\ u < y_n \leq v$.
   — Montrer que si $v \leq y_0$, alors pour tout entier naturel $n,\ v \leq y_n$.
   — Étudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$
   En déduire selon la position de y_0 par raport à v, le sens de variation de la suite (y_n).
3. Etude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geq 3$.
   (a) Etudier sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n. En déduire que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < v_n$.
   (b) Déterminer pour $n \geq 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$. Déduire des variations de la fonction f_n, le sens de variation de la suite (u_n) puis prouver la convergence de celle-ci.
   (c) Montrer que $u_n = \exp(u_n/n)$. En déduire que la limite de (u_n) est 1.
   (d) Déterminer, pour $n \geq 4$ le signe de $f_{n-1}(v_n)$. Déduire des variations de la fonction f_n, le sens de variation de la suite (v_n),..
   (e) On pose pour tout réel $x > 1$: $g(x) = x - \ln(x)$. Montrer (à l'aide d'un théorème dont on rapellera l'énnoncé) que g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$.
   Établir que $g(v_n/n) = \ln(n)$, montrer à l'aide de g^{-1} (bijection réciproque de g) que v tend vers $+\infty$,.

Exercice 2

Soit a et b des réels avec $0 < a < b$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u_n et v_n existent bien et que u_n et v_n sont deux réels strictement positifs.
2. Écrire un script Scilab demandant à l'utilisateur les variables n, a et b et affichant les valeurs de u_n et v_n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, On pose $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ et $y_n = u_n - v_n$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{2^n}$.
   (b) Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. .
5. Soit $x \in]0, 1[$. On suppose ici que $a = x$ et $b = 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right)$.
   (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\dfrac{v_k}{v_{k+1}}$ en fonction de k et x.
   (b) En déduire une expression de P_n en fonction de v_{n+1}.

Problème - Inspiré EDHEC

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n + 1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k + 1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1 - p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

1. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.
   (b) Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
   (c) En déduire $\mathrm{P}(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0\leq k\leq n-1}$ pour montrer que : $\mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - p$
3. (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \ldots n + 1\},\ \mathrm{P}(X_{n+1} = k) = p\,\mathrm{P}(X_n = k - 1)$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n - 1\}$, $\mathrm{P}(X_n = k) = p^k (1 - p)$.
   En déduire également la valeur de $\mathrm{P}(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

(c) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\left(X_n = k\right) = 1$.

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input("Entrez un entier n")
X = 0
p = 1/3
for k = ...........
    u = rand()
    if ............ then
        X = X+1
    else
        X = .....
    end
end
disp(X)
```

5. (a) Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\, p^{k-1} = \frac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$

(b) En déduire que $E(X) = \dfrac{p\,(1-p^n)}{1-p}$.

6. (a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $E\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(E\left(X_n^2\right) + 2E\left(X_n\right) + 1\right)$.

(b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E\left(X_n^2\right) + (2n-1)\,\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$

Montrer que $u_{n+1} = p\,u_n + \dfrac{p\,(1+p)}{1-p}$

(c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

(d) Montrer enfin que : $V\left(X_n\right) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)\, p^n\,(1-p) - p^{2n+1}\right)$