A rendre pour le Vendredi 18 Décembre

Exercice 1 (Les questions sont indépendantes) -Obligatoire pour les Groupes 8 à 10

Exercice 14A (cours)
Résoudre les systèmes suivants

1. $\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases}$

Exercice 14B (Application)
Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$

Exercice 15A (cours)

1. Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes.
2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Exercice 15B (Application)
Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer C^{-1}.

Exercice 2 (Inverse de matrice et résolution de système) - Obligatoire pour les groupes 3 à 7

1. Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible
2. (a) Calculer l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire les solutions du système linéaire : $\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ x - y + z = 1 \\ 2x - 4y + 5z = -3 \end{cases}$.
3. On considère le système (E_λ) : $\begin{cases} -2x - 2y + z = \lambda x \\ -2x + y - 2z = \lambda y \\ x - 2y - 2z = \lambda z \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Pour quelles valeurs de λ, le système (E_λ) est-il de Cramer ?

(b) Résoudre le système selon les valeurs de λ.

Exercice 1 - Inspiré EDHEC 1995 - Obligatoire pour les groupes 1 et 2

p désigne un réel élément de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
Un mobile se déplace sur un axe d'origine O ; à chaque instant, il est soit en O, soit en A d'abscisse 1, soit en B d'abscisse -1.
Si à un instant donné, il est en O, alors, à l'instant suivant, il sera en A avec la probabilité p ou en B avec la probabilité q.
Si à un moment donné, il est en A ou en B, alors, à l'instant suivant, il sera à coup sûr en O.
On suppose qu'à l'instant 0, le mobile est en O.
Pour tout entier naturel n et pour tout $i \in \{-1, 0, 1\}$, on note $E_{n,i}$ l'événement : « à l'instant n, le mobile est au point d'abscisse i ».

1. Calculer $\mathrm{P}(E_{n,i})$ pour tout $n \in [\![0, 1]\!]$ et pour tout $i \in \{-1, 0, 1\}$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{-1, 0, 1\}$, calculer
$$\mathrm{P}_{E_{n,j}}(E_{n+1,i}).$$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E_{n+1,-1}) &= q\mathrm{P}(E_{n,0}),\\ \mathrm{P}(E_{n+1,0}) &= \mathrm{P}(E_{n,-1}) + \mathrm{P}(E_{n,1}),\\ \mathrm{P}(E_{n+1,1}) &= p\mathrm{P}(E_{n,0}).\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(E_{n,-1}) \\ \mathrm{P}(E_{n,0}) \\ \mathrm{P}(E_{n,1}) \end{pmatrix}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice carrée réelle d'ordre 3 que l'on précisera.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n U_0$.
   (c) En déduire un script Scilab demandant à l'utilisateur d'entrer n, p et q et affichant la matrice U_n.
4. (a) Soit $Q = \begin{pmatrix} q & 1 & q \\ -1 & 0 & 1 \\ p & -1 & p \end{pmatrix}$.
   Montrer que Q est inversible et déterminer Q^{-1}.
   Soit $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que $M = QDQ^{-1}$.
   (c) Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = QD^nQ^{-1}$.
5. (a) Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathrm{P}(E_{n,-1})$, $\mathrm{P}(E_{n,0})$ et $\mathrm{P}(E_{n,1})$.
   (b) Calculer $\mathrm{P}(E_{2n,0})$. Aurait-on pu prévoir ce résultat ?