

A rendre pour le Mercredi 9 Décembre

Exercice 1 - ECRICOME 2013 ECT

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 2x + \frac{3 \ln(x)}{x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = 2x^3 - 6 \ln(x) + 3$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f .

I- Étude du signe de g

1. Calculer $g'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer a, b, c tel que $x^3 - 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
3. En déduire que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution p que l'on précisera.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
5. Construire le tableau de variation de g .
6. Déterminer le signe de $g(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

II- Représentation graphique de f

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
3. Déterminer les limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R}_+^* .
5. On note $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax$. Calculer a et b .
6. On note (D) la droite d'équation $y = ax + b$. Déterminer quand la courbe \mathcal{C}_f est au dessous de (D) .
7. Tracer sur un même dessin la courbe \mathcal{C}_f et la droite (D) .

III- Étude d'une équation. (Obligatoire uniquement par les groupes 1 à 4)

Soit $n \geq 1$ un entier naturel non nul, on considère l'équation

$$(E_n) : f(x) = 2n$$

1. Prouver que l'équation (E_n) admet une unique solution (que l'on ne cherchera pas à calculer). On note x_n cette solution.
2. Calculer puis classer par ordre croissant les réels $f(x_n)$, $f(1)$ et $f(n)$. En déduire l'encadrement :

$$\forall n \geq 1, \quad 1 \leq x_n \leq n.$$

3. Justifier que : $\forall n \geq 1, 1 - \frac{x_n}{n} = \frac{3 \ln(x_n)}{2n(x_n)^2}$.
4. Prouver que : $\forall n \geq 1, 0 \leq \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leq \frac{\ln(n)}{n}$.
5. En utilisant le théorème des gendarmes, déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$.

Exercice 2 - Variables aléatoires (Groupes 8 à 10)

Exercice 12A (cours)

On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs 0,1,2 ou 3. On donne

$$P(X = 0) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Sachant que les événements $(X = 2)$ et $(X = 3)$ sont équiprobables, déterminer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
2. Donner la loi de X , puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 12B (Application)

On tire successivement 2 dés à 6 faces. On note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.

1. Donner $X(\Omega)$ et la loi de X .
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

On donne les résultats suivants : $18^2 = 324$, $29^2 = 841$ et $105 \times 18 = 1890$

Exercice 13A (cours)

On tire successivement et avec remise 6 cartes d'un paquet de 32 cartes. Dans les cas suivants, déterminer en le justifiant la loi de X , son espérance et sa variance.

1. On note X le nombre de valets obtenus.
2. On note X la variable aléatoire valant 1 si l'on a que des figures (rois, dames et valets) et 0 sinon.
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers.
4. On note X la variable aléatoire valant 1 si un coeur tombe, 2 si un carreau tombe, 3 si un trèfle tombe et 4 si un pique tombe.

Exercice 3 - Fonctions et Variables aléatoires (Groupes 3 à 7)

Terrassé par la perte de son fidèle ami Osorno emporté par la déesse Mapuche, et chassé du Villarica par les flammes noires de sa récente éruption, notre jeune condor Puyehue décida de réaliser un voyage initiatique à travers les Andes. Celui-ci l'amena à rencontrer une jeune condor nommée Chiloe. Et aujourd'hui il songe à sa descendance. Il faut savoir que le condor se reproduit de la manière suivante, il a 2 descendants avec probabilité $p \in]0, 1[$, et 0 descendant avec probabilité $1 - p$. On note X_n le nombre de descendants de Puyehue à la $n - ieme$ génération. On s'intéresse à $P(X_n = 0)$, c'est à dire à la probabilité que la lignée de Puyehue soit éteinte à la $n - ieme$ génération.

1. Soit $f(x) = px^2 + 1 - p$ une fonction définie sur $[0, 1]$ et soit $(u_n)_n$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$
 - (a) Tracer le tableau de variations complet de f .
 - (b) En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

- (c) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
2. (a) On remarque que $X_0 = 1$. Déterminer la loi de X_1 et X_2 .
- (b) Montrer que $(X_1 = 0, X_1 = 2)$ est un système complet d'événements.
- (c) Justifier que $P_{X_1=2}(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)^2$.
- (d) Montrer en utilisant la FPT que

$$P(X_{n+1} = 0) = 1 - p + pP(X_n = 0)^2.$$

Problème - Évolution des intentions de vote (Groupes 1 et 2)

Dans une élection à venir, deux candidats A et B se présentent. Un groupe d'électeurs est composé de m individus, avec $m \geq 2$.

Initialement, au jour appelé « jour 0 », le nombre d'individus préférant le candidat A vaut a (il y en a donc $m - a$ préférant le candidat B). Ensuite, chaque jour, un des individus au hasard dans le groupe rencontre un autre, au hasard également, et il lui parle des élections. Si leurs intentions de vote diffèrent, il le convainc de voter comme lui.

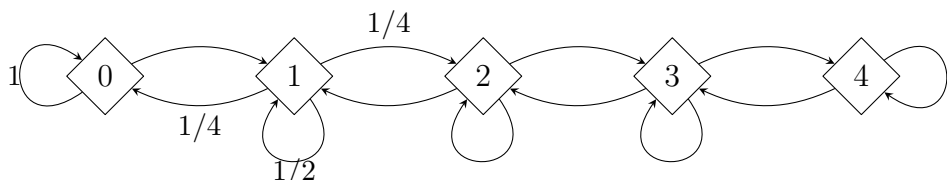
Pour tout entier naturel n , on note X_n le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat A le soir du n -ième jour. Ainsi, X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, m \rrbracket$.

On remarque que X_0 est une variable aléatoire certaine : $P(X_0 = a) = 1$.

Partie I - Un cas particulier : $m = 4$ - Inspiré ESSEC 2011

Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

1. Soit i et j deux entiers dans $\llbracket 0, 4 \rrbracket$. On note $p_{i,j}$ la probabilité pour qu'il y ait exactement j personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour A un jour donné, sachant qu'il y en avait i la veille. C'est à dire
- (a) Justifier : $p_{0,0} = p_{4,4} = 1$.
- (b) Justifier : si i et j dans $\llbracket 0, 4 \rrbracket$ sont tels que $|i - j| \geq 2$, alors $p_{i,j} = 0$.
- (c) Établir : $p_{1,0} = p_{1,2} = \frac{1}{4}$ et $p_{1,1} = \frac{1}{2}$.
- (d) De la même façon, donner pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, 4 \rrbracket^2$ la probabilité $p_{i,j}$.
On présentera les résultats sur le diagramme suivant, à reproduire et à compléter, et on justifiera quelques cas.



2. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n , la matrice colonne $U_n =$

$$\begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n , établir la relation : $U_{n+1} = MU_n$.

En déduire pour tout entier naturel n , l'égalité $U_n = M^n U_0$.

Partie II - Le cas général

On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de m électeurs.

On note $\pi_{n,k} = P(X_n = k)$, la probabilité pour qu'il y ait exactement k électeurs envisageant de voter pour A à l'issue du n -ième jour.

1. Soit n un entier naturel.

(a) établir les trois relations :

$$\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \quad P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = \frac{k(m-k)}{m(m-1)};$$

$$\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) = \frac{k(m-k)}{m(m-1)};$$

$$\forall k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket, \quad P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = 1 - \frac{2k(m-k)}{m(m-1)}.$$

(b) En déduire la relation, si $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$:

$$\pi_{n+1,k} = \frac{(k-1)(m+1-k)\pi_{n,k-1} + [m(m-1) - 2k(m-k)]\pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\pi_{n,k+1}}{m(m-1)}.$$

2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$,

$$\pi_{n,k} \leq \left(\frac{m(m-1) - 2}{m(m-1)} \right)^n.$$

3. Pour tout entier naturel n , on pose $Z_n = X_{n+1} - X_n$.

(a) Justifier : $Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.

(b) Exprimer $P(Z_n = 1)$ en fonction des probabilités $\pi_{n,k}$ avec $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$.

(c) Comparer $P(Z_n = -1)$ et $P(Z_n = 1)$.

(d) En déduire que $E(Z_n) = 0$.

(e) Montrer que la suite $\left(E(X_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et déterminer cette constante en fonction de a .