A rendre pour le Mercredi 18 Novembre

Exercice 1 - Probabilités et suites - Obligatoire Groupe 9 et 10

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 : U_1 contient 2 boules blanches et 2 boules noires et U_2 contient une boule blanche et 3 boules noires. On effectue des tirages avec remise d'une boule selon le protocole suivant :

— le premier tirage se fait dans l'urne U_1

— si le n-ième tirage a donné une boule blanche (resp. noire), le $n+1$-ième tirage s'effectue dans l'urne U_1 (resp. U_2).

On introduit les événements B_n (resp N_n) "le $n$ème tirage donne une boule blanche (resp. noire) " et on note $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1 puis p_2.
2. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
3. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{4}$.
4. En déduire p_n en fonction de n.

Exercice 2 - Dénombrement- Obligatoire Groupe 4 à 10

Une grande enveloppe contient les 12 figures d'un jeu de cartes : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets.

1. On tire simultanément et au hasard 5 cartes de l'enveloppe.
   (a) Combien de tirages ne contiennent aucun roi ?
   (b) Combien de tirages contiennent au moins un roi ?
   (c) Combien de tirages contiennent exactement deux rois ?
   (d) Combien de tirages contiennent quatre figures identiques (c'est-à-dire un carré) ?
2. Si l'on tire successivement et sans remise 5 cartes de cet enveloppe, combien de tirages contiennent au moins un roi ?

Exercice 3 - Suite et somme - Obligatoire Groupe 2 à 10

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} + n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Montrer que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
3. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
   (b) Donner l'expression de v_n en fonction de $n \geq 0$.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \geq 0$.

4. (a) Donner l'expression de $\sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Donner l'expression de $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 - Sommes - Obligatoire Groupe 1 à 8

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3$. On propose 3 méthodes de calcul de S_n.

1. **Première méthode**
   (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Développer $(2k+1)^3$.
   (b) En déduire alors que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.
2. **Deuxième méthode** Montrer par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.
3. **Troisième méthode** On introduit $T_n = \sum_{k=0}^{n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3$.
   (a) Comparer $S_n + T_n$ et U_n.
   (b) Calculer T_n et U_n.
   (c) En déduire alors que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

Exercice 5 - Tournoi de Poker - Obligatoire Groupe 1 à 3

Vous vous inscrivez à un tournoi de Poker no-limit Texas Hold'em amateur dans lequel 100 joueurs participent dont 25 % de filles. Au début du jeu chaque joueur reçoit le même nombre de jetons. Lorsque l'on n'a plus de jetons, on est éliminé du tournoi. Les meilleurs joueurs reçoivent un lot.

Règles du no-limit Texas Hold'em : Le jeu se joue avec un jeu de 52 cartes (4 couleurs, 13 valeurs) en plusieurs phases :
Préflop : Chaque joueur reçoit 2 cartes faces cachées. $\rightarrow$ *Tour de mise*
Flop : On met 3 cartes visibles de tous sur le board. $\rightarrow$ *Tour de mise*
Turn : On rajoute 1 carte visible de tous sur le board. $\rightarrow$ *Tour de mise*
River : On rajoute 1 carte visible de tous sur le board. $\rightarrow$ *Tour de mise*

Le but est d'avoir la meilleur combinaison de 5 cartes en prenant les 2 cartes cachées et les 5 cartes visibles sur le board. Voici les différentes combinaisons possibles de la moins forte à la plus forte :

1. **La paire :** Avoir 2 cartes de même valeur (exemple : A$\diamondsuit$ – A$\clubsuit$ – 4$\heartsuit$ – 6$\spadesuit$ – 2$\clubsuit$)
2. **La double paire :** Avoir 2 fois 2 cartes de même valeur (exemple : A$\diamondsuit$ – A$\clubsuit$ – 2$\heartsuit$ – 6$\spadesuit$ – 2$\clubsuit$)
3. **Le brelan :** Avoir 3 cartes de même valeur (exemple : A$\diamondsuit$ – A$\clubsuit$ – A$\heartsuit$ – 5$\spadesuit$ – 2$\clubsuit$)
4. **La suite :** Avoir 5 cartes qui se suivent (exemple : 6$\heartsuit$ - 7$\diamondsuit$ - 8$\clubsuit$ - 9$\spadesuit$ - 10$\clubsuit$)
5. **La couleur :** Avoir 5 cartes de la même couleur (exemple : 3$\clubsuit$ - 6$\clubsuit$ - 8$\clubsuit$ - 10$\clubsuit$ - A$\clubsuit$)
6. **Le full :** Avoir en même temps une paire et un brelan (exemple : A$\clubsuit$ – A$\spadesuit$ – A$\heartsuit$ – 5$\spadesuit$ – 5$\heartsuit$)
7. **Le carré :** Avoir 4 cartes de même valeur (exemple : A$\diamondsuit$ – A$\clubsuit$ – A$\heartsuit$ – A$\spadesuit$ – 2$\clubsuit$)
8. **La suite couleur ou quinte flush :** Avoir 5 cartes qui se suivent et de même couleur (par exemple 6$\clubsuit$ - 7$\clubsuit$ - 8$\clubsuit$ - 9$\clubsuit$ - 10$\clubsuit$)

1. **Tirage au sort de la place.** Les joueurs sont répartis sur 10 tables de 10 places. On note traditionnellement la place $t-p$ ou t est le numéro de la table et p le numéro de la place à table. Ainsi se trouver en $1-6$ signifie être à la table n°1, siège n°6. Le tirage au sort de la place se fait de manière équiprobable.
   (a) Quel est l'univers Ω et la loi de probabilité associée à cette expérience.
   (b) En déduire la probabilité d'être en $1-6$?
   (c) Quelle est la probabilité de se trouver au siège n°1 (quelque soit la table) ?
   (d) Quelle est la probabilité qu'il y ait une table avec au moins 3 filles ?

   Après tirage au sort, vous êtes à la table n°1, siège n°6.
2. **Répartition des prix.** Seul les 10 premiers joueurs recevront un lot (différent en fonction de leur classement). En admettant que chacun ait autant de chance de gagner, donner
   (a) le nombre de répartition des lots possible entre les 100 joueurs
   (b) votre probabilité d'avoir un lot.
3. **Préflop** Vous recevez deux cartes face cachée (Comme on ne connait pas les cartes des autres joueurs, on considère que ces 2 cartes sont tirés aléatoirement dans le paquet de 52 cartes).
   (a) Quelle est la probabilité d'avoir $A\heartsuit A\spadesuit$?
   (b) Quelle est la probabilité d'avoir une paire d'As ?
   (c) Quelle est la probabilité d'avoir une paire ?

   On reçoit $A\heartsuit Q\heartsuit$ (As et Dame de coeur).
4. **Flop** On tire les 3 cartes du flop visibles de tous (Attention, dans cette partie on sait qu'on ne peut pas tirer l'As de coeur ou la dame de coeur puisqu'on les a en main)
   (a) Montrer que la probabilité d'obtenir une couleur (3 cartes de coeur au flop) est $\dfrac{33}{3920}$.
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir un carré dès le flop ?

   Le flop tombe : $J\heartsuit - 2\spadesuit - 7\clubsuit$ (Valet de coeur, 2 de pique et 7 de trèfle) - Il reste donc 47 cartes dans le paquet. Nous n'avons aucune combinaison.
5. **Turn** On tirera une nouvelle carte visible de tous.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une paire sur la turn ? (c'est à dire tirer un As, une Dame, un valet, un sept ou un 2 ?)
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une couleur sur la turn ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir une couleur en comptant la turn et la river ?

   La turn est un : $10\heartsuit$. Nous n'avons toujours pas de combinaison mais nous avons plusieurs possibilités selon la river
6. **River** On tire la dernière carte visible de tous.
   (a) Combien de cartes nous permettent d'obtenir : une paire d'As ou de dame ? une couleur ? une suite ? une quinte flush ?
   (b) En déduire la probabilité de chacun de ces évènements.

Exercice 6 - Étude de produit - Obligatoire Groupe 1

Soit n un entier strictement positif.

1. On considère le produit :

$$P_n = (1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\dots(1+\frac{1}{n}) = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})$$

   (a) Montrer que P_n s'exprime très simplement en fonction de n.

   (b) En déduire la valeur de

$$Q_n = \ln 2 + \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{3}) + \dots + \ln(1+\frac{1}{n}) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}).$$

2. Soit le produit

$$R_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \dots \times \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)$$

   (a) Montrer que R_n s'exprime très simplement en fonction de n.

   (b) En déduire la valeur de

$$S_n = \ln(1-\frac{1}{2}) + \ln(1-\frac{1}{3}) + \dots + \ln(1-\frac{1}{n}) = \sum_{k=2}^{n} \ln(1-\frac{1}{k})$$

3. En utilisant les résultats précédents, calculer :

$$T_n = \ln(1-\frac{1}{2^2}) + \ln(1-\frac{1}{3^2}) + \dots + \ln(1-\frac{1}{n^2}) = \sum_{k=2}^{n} \ln(1-\frac{1}{k^2})$$

4. En déduire l'expression de : $W_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.