A faire en autonomie

Exercice 1 - Inspiré ESLSCA-ISC 99

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

A) Étude de la suite u.

1. Étude de f.
   (a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
   (b) Déterminer la dérivée de f et préciser son domaine de dérivabilité.
   (c) Déterminer les limites de f aux bords de son domaine de définition.
   (d) Tracer le tableau de variation de f.
   (e) Résoudre l'équation $f(x) = x$ et l'inéquation $f(x) > x$.
   (f) Tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.
2. Dans cette partie, on suppose que $u_0 = 0$.
   (a) Écrire un script Scilab demandant à l'utilisateur d'entrer un entier n et qui affiche u_n.
   (b) Vérifier que u est bien définie.
   (c) Montrer que la suite u est majorée par 1.
   (d) Montrer que la suite est croissante.
3. Dans cette partie, on suppose que $u_0 > 1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n > 1$.
   (b) Montrer que la suite est décroissante.

B) Calcul de u_n en fonction de n quand $u_0 > 1$.

On suppose désormais que $u_0 > 1$.

1. Étude de fonctions auxiliaires.
   On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions ch et sh par $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
   (a) Exprimer les dérivées des fonctions ch et sh en fonction de ch et sh.
   (b) Montrer que pour tout réel x, $ch(x) > 0$. Calculer $sh(0)$ et déterminer le signe de $sh(x)$.
   (c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $ch(\alpha) = u_0$.
2. (a) Montrer que pour tout réel x,
   $$2\left(ch\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 = ch(x)$$
   (b) En déduire que pour tout entier n,
   $$u_n = ch\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

C) Une autre suite.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $sh(x) = n$ a une unique solution **positive** que l'on notera v_n.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $sh(x) < e^x$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $v_n > \ln(n)$.

Exercice 2 - Inspiré ECRICOME 2001

Dans cet exercice, on étudie les matrices de la forme suivante (a est un nombre réel) :

$$N(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

A) Des cas particuliers.

1. Lorsque $a = 0$, quelles sont les matrices $M(0)$ et $N(0)$?
2. Quelle particularité partage les matrices $N(a)$ et $M(a)$?
3. On s'intéresse désormais à la matrice

$$N(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse.

   (b) Montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (N(1))^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1+(-1)^{n+1} \\ 1+(-1)^{n+1} & 1+(-1)^n \end{pmatrix}$$

B) Étude générale de $N(a)$

1. Résoudre l'équation $(1-a)^2 - a^2 = 0$ d'inconnue a.
2. Montrer que $N(a)$ est inversible si et seulement si $a \neq \frac{1}{2}$ et déterminer alors son inverse quand c'est possible.
3. On introduit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
4. Déterminer la matrice $D(a) = P^{-1}N(a)P$.
5. Montrer que $N(a) = PD(a)P^{-1}$.
6. Montrer par récurrence que $(N(a))^n = P(D(a))^n P^{-1}$.
7. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(a)^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(1-2a)^n & 1-(1-2a)^n \\ 1-(1-2a)^n & 1+(1-2a)^n \end{pmatrix}$$

C) Étude générale de $M(a)$

1. Montrer que, pour tous réels a,b, on a : $M(a)M(b) = M(a+b-3ab)$.
2. Montrer que si $a \neq 1/3$ il existe alors un réel b tel que $a+b-3ab=0$. En déduire que si $a \neq 1/3$ alors la matrice $M(a)$ est inversible.
3. Calculer $M\left(1/3\right)^2$ et en déduire que $M\left(1/3\right)$ n'est pa sinversible.
4. Déterminer le réel a_0 non nul, tel que :

$$[M(a_0)]^2 = M(a_0)$$

5. On considère les matrices :

$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$

où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

(a) Montrer que pour tout a, il existe un réel α -que l'on exprimera en fonction de a- tel que :

$$M(a) = P + \alpha Q$$

(b) Calculer P^2, QP, PQ, Q^2.

(c) Pour tout entier naturel n, non nul, montrer que $[M(a)]^n$ s'écrit $x_nP + y_nQ$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites vérifiant une relation de récurrence que l'on déterminera.

(d) Montrer alors que

$$[M(a)]^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2a^n & 1-a^n & 1-a^n \\ 1-a^n & 1+2a^n & 1-a^n \\ 1-a^n & 1-a^n & 1+2a^n \end{pmatrix}$$

Exercice 3 - Probabilités

On considère une roue de loterie composée de 12 secteurs, numérotés de 1 à 12. Un croupier fait tourner cette roue devant un repère et on considère qu'à chaque lancer, chaque secteur à la même probabilité de s'arrêter devant le repère.
Un joueur choisit à chaque partie un ou plusieurs numéros parmi les 12. Il est gagnant si l'un des numéros choisis apparaît à l'arrêt de la roue.
Le joueur adopte la tactique suivante :

- il mise sur un seul numéro lors de la première partie,
- s'il perd à la n-ème partie ($n \geq 1$), il mise sur 2 numéros à la partie suivante ; s'il gagne à la n-ème partie, il mise sur 3 numéros à la partie suivante.

1. Déterminer p_1 et p_2.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n la probabilité de l'événement A_n : "le joueur gagne la n-ème partie.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}.$$

(b) En déduire l'expression de p_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Dans cette question, on fixe $n \geq 2$ et, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note B_k l'événement : "le joueur gagne une seule fois lors de n-parties et cette victoire a lieu lors de la k-ème partie".

(a) Exprimer B_n à l'aide des événements A_k et en déduire $P(B_n)$.

(b) Calculer $P(B_1)$.

(c) Calculer, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(B_k)$.

(d) Soit C_n l'événement : "le joueur gagne une seule fois au cours des n parties". Exprimer C_n à l'aide des événements B_k et en déduire $P(C_n)$.

4. **Étude Scilab.** On rappelle que la fonction `rand()` permet d'obtenir un nombre réel aléatoire entre 0 et 1.

(a) Que fait l'expression `ceil(12 * rand())` ?

(b) Recopiez et complétez ce programme Scilab permettant de simuler la première partie (on demandera au joueur quel numéro, il choisit)

```
resultat = ceil(12*rand())
choix_joueur = ................
if ................ then
    disp("Le joueur a gagné")
else
    disp("Le joueur a perdu")
....
```