A faire en autonomie

Exercice 1 - Calculs de Sommes et de Produits

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$.
2. Soit $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de réels. Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{k=2}^{n-1}(4^{2-k} + 5^k 6^{n-k+1}), \qquad (2) \sum_{k=3}^{n+1} 2^{3k+2}\binom{n}{k-1}.$$

4. Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercice 2 - Matrice

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité d'ordre 4.

1. Trouver deux scalaires α et β vérifiant $A = \alpha I + \beta J$.
2. Calculer J^2, puis J^p pour tout entier naturel p.
3. En déduire A^2 puis A^3 en fonction de I et J.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, établir que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1} b^k (a-b)^{n-k} = \frac{1}{4}\left((a+3b)^n - (a-b)^n\right)$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, A^n en fonction de I et J.
5. Exprimer A^2 en fonction de A et I. En déduire sous quelle(s) condition(s) A est inversible et donner, lorsque A est inversible, A^{-1} en fonction de A et de I.
6. Dans les conditions du (5), calculer A^{-1} en fonction de I et J et vérifier que la formule obtenue en (4)(b) s'étend à $n = -1$.

Exercice 3 - Probabilités

On considère deux urnes A et B contenant toutes deux des boules blanches et des boules noires. Soient a et b dans $]0,1[$ tels que la proportion de boules blanches dans A (resp. B) soit a (resp. b).
On effectue N tirages successifs en suivant le protocole suivant :

- chaque tirage se fait avec remise dans l'urne d'où provient la boule,
- la première urne est choisie au hasard,
- si on tire une boule blanche, on tire la boule suivante dans la même urne ; si on en tire une noire, on change d'urne pour le tirage suivant.

Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on note :
$p_n = P(Bl_n)$ la probabilité d'obtenir une boule blanche au n-ème tirage,
$q_n = P(A_n)$ la probabilité que la n-ème tirage soit effectué dans l'urne A.

1. Calculer p_1, q_2 et p_2.
2. Déterminer une relation liant q_n et q_{n-1} pour tout $n \in [\![2, N]\!]$.
3. En déduire l'expression de q_n, puis de p_n, en fonction de a, b et n.

Exercice 4 - Inspiré EDHEC 2001

Partie 1

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Écrire un script Scilab permettant de demander à l'utilisateur d'entrer un nombre n et qui renvoie v_n. (On pourra écrire v_{n+1} en fonction de v_n).
2. Montrer que : $\forall k > 1, \frac{1}{k} \leq ln(k) - ln(k-1)$ (Indication : pensez aux intégrales)
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq ln(n) + 1$.

Partie 2

On considère une suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2. (a) Pour tout entier k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 \geq 2n + 1$.
3. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

   (b) En utilisant la partie 1, établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$