

A rendre pour le Vendredi 16 Octobre

Exercice 1 - Probabilités et suites

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 ainsi que d'une pièce de monnaie non truquée. Initialement, l'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires et l'urne U_2 contient deux boules noires.

On considère l'épreuve \mathcal{E} suivante :

- on lance la pièce
- si l'on obtient pile, on tire une boule de U_1 , sinon on tire une boule de U_2
- si la boule tirée est noire, elle est remise dans la même urne, sinon elle est remise dans l'autre urne.

Pour n entier naturel non nul, on désigne par A_n l'évènement

A_n : " la boule blanche se trouve dans l'urne U_1 à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ répétition de l'épreuve \mathcal{E} "

et par B_n l'évènement

B_n : " la boule blanche se trouve dans l'urne U_2 à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ répétition de l'épreuve \mathcal{E} "

1. Dans cette question, on effectue une seule fois l'épreuve \mathcal{E} .
 - (a) La notation PiB_1 signifiant : "la pièce a donné pile et on a tiré la boule blanche de U_1 " (on l'a donc remise dans U_2), calculer la probabilité de l'évènement $\{PiB_1\}$.
 - (b) En utilisant la même notation, décrire les résultats possibles de l'épreuve \mathcal{E} .
 - (c) Calculer la probabilité des évènements A_1 et B_1
2. On répète maintenant l'épreuve \mathcal{E} .
 - (a) Vérifier que : $\forall n \geq 0, P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{5}{6}$ et $P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{6}$
 - (b) Calculer également $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{B_n}(B_{n+1})$
 - (c) On notera $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$. En déduire a_{n+1} puis b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
 - (d) Que vaut la somme $a_n + b_n$? En déduire que $\forall n \geq 0, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6} \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6} \end{cases}$
 - (e) Déterminer, en fonction de n , les expressions de a_n et b_n .

Exercice 2 - Matrices et suites

Soit a, b, c, d des réels et soit E l'ensemble des matrices carrées $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2 qui vérifient les 2 conditions : $a + d = 0$ et $ad - bc = 0$.

1. (a) Les matrices de E sont-elles inversibles.
- (b) Vérifier que les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à E .
- (c) En déduire que la somme et le produit de 2 matrices de E n'appartiennent pas nécessairement à E .

- (d) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de E . Déterminer la matrice M^2 et en déduire pour tout entier $n \geq 2$, la matrice M^n .

Dans la suite de l'exercice, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité.

2. (a) Justifier que A est inversible et donner son inverse.
 (b) On pose $K = A - 3I$. Vérifier que la matrice K appartient à E .
 (c) Déterminez α et β tel que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$.
 (d) Retrouver le fait que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A$.
 (e) Montrer par récurrence qu'il existe une suite de réels a_n et b_n telle que $A^n = a_n A + b_n I$.
 (f) Déterminer a_n et b_n en fonction de n puis A^n .

Exercice 3 - Matrices et probabilités

Dans cet exercice, on considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et l'on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n + 9 - 4 \times 2^n & 5^n - 9 + 8 \times 2^n & 5^n + 3 - 4 \times 2^n \\ 2 \times 5^n - 2 \times 2^n & 2 \times 5^n + 4 \times 2^n & 5^n - 2 \times 2^n \\ 3 \times 5^n - 9 + 6 \times 2^n & 3 \times 5^n + 9 - 12 \times 2^n & 3 \times 5^n - 3 + 6 \times 2^n \end{pmatrix}$$

(Dans le sujet de concours initial, il s'agissait de montrer cette relation dans la première partie du problème)

Les trois sports du triathlon sont : la natation, le cyclisme et la course à pied.

Un athlète décide de pratiquer un sport par jour pour s'entraîner au triathlon. Il commence son entraînement par la natation, au jour 0.

Son entraînement obéit ensuite aux règles suivantes (valables pour tout entier naturel n) :

- si l'athlète a pratiqué la natation le jour n , alors il pratiquera au jour $n + 1$:
 - la natation avec probabilité $1/5$
 - le cyclisme avec probabilité $1/5$
 - la course à pied avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué le cyclisme le jour n , alors il pratiquera au jour $n + 1$:
 - la natation avec probabilité $2/5$
 - le cyclisme avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué la course à pied le jour n , alors il pratiquera au jour $n + 1$:
 - le cyclisme avec probabilité $1/5$
 - la course à pied avec probabilité $4/5$

Pour tout entier naturel n , on désigne par :

- A_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la natation le jour n » et par a_n la probabilité de A_n .
- B_n l'évènement « l'athlète s'entraîne au cyclisme le jour n » et par b_n la probabilité de B_n .
- C_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la course à pied le jour n » et par c_n la probabilité de C_n .

1. Que valent $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$?

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.$$

Exprimer de même les probabilités b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des probabilités a_n , b_n et c_n .

3. Déterminer alors la matrice A telle que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

et exprimer A en fonction de la matrice M de la partie I.

4. Établir que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. En déduire alors l'expression de a_n , b_n et c_n en fonction de n pour tout entier naturel n .