

A rendre pour le 7 Octobre

Exercice 1 - Démonstration par récurrence

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n \geq 1 + 3n$.
2. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2} \ln(u_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq e$.
3. La suite de Fibonacci (u_n) est défini par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$. Démontrer par récurrence (forte) que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.

Attention, la dernière récurrence est une récurrence forte, c'est à dire qu'il faut démontrer que \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 sont vraies puis supposer que \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} sont vraies et on démontre que \mathcal{P}_{n+2} est vraie.

Exercice 2 - Fonctions et suites

Note importante : La partie 1 n'est pas à traité puisque vous l'avez faite lors du premier DM. Par contre, vous pouvez utiliser des résultats de la partie 1 pour la partie 2.

Partie 1

On considère la fonction $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est paire.
3. Tracer le tableau de variations de f .
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \ln(1 + e^{-2x})$.
5. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$.
6. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$.
7. Résoudre l'inéquation $f(x) < x + 1$.
8. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de f , $y = x$ et $y = x + 1$.

Partie 2

Etude de la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \ln(e^{u_n} + e^{-u_n}) \end{cases}$$

1. Justifier que la suite est bien définie et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
2. Déduire de la partie A que la suite u est croissante.
3. A l'aide de la partie A montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n + 1$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < n + 1$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln(n + 1)$.

Exercice 3 - Scilab

Les deux questions sont indépendantes

1. On considère le programme

```
a = input('Entrez un réel')
b = 4*a^2
a = b - 4*a
a = a +1
disp(a)
```

- Que fait le programme ci dessus ?
- Qu'affiche ce programme si l'utilisateur entre la valeur 2 ?
- Pour quelles valeur de a l'ordinateur renvoie la valeur 4 ?

2. Au 18 Aout 2020, le taux de change entre l'euro et les dollars américains, les livres sterling ou les roupies indiennes sont les suivants

- 1 EUR = 1,1960 USD
- 1 EUR = 0,9042 GBP
- 1 EUR = 89,2231 INR

Recopiez et complétez le programme suivant afin que lorsqu'un utilisateur entre une somme en euro et la monnaie dans laquelle il veut le change, il obtienne l'argent changé.

```
eur = input("Entrez la somme en euros")
change = input ("Entrez 1 si vous souhaitez obtenir le change en dollar. Entrez 2
si vous souhaitez obtenir le change en livres. Enfin, entrez 3 si vous souhaitez
obtenir le change en roupies.")
```

```
USD = .....
GBP = .....
INR = .....
```

```
if change == ..... then
    disp("Avec " + str(...)) + " euros, vous obtenez " + str(USD) + " dollars")
elseif change == ..... then
    disp("Avec " + str(...)) + " euros, vous obtenez " + str(GBP) + " livres")
else
    disp("Avec " + str(...)) + " euros, vous obtenez " + str(INR) + " roupies")
end
```