

A rendre pour le 19 Mai 2021

Exercice 1 - Obligatoire pour tous les groupes

Les parties sont toutes indépendantes

Partie I

Un joueur joue au jeu TETRIS et passe les niveaux $1, 2, \dots, n, \dots$ jusqu'à ce qu'il échoue. Il a une probabilité $\frac{1}{n}$ de réussir le jeu de niveau n . Soit X le numéro du dernier niveau réussi. (Il finit toujours par échouer et la réussite des niveaux sont indépendants).

1. Donnez $X(\Omega)$. Trouver la loi de X .
2. Montrer que l'on a $E(X) = e - 1$.
3. A l'aide du théorème de Transfert, montrer que

$$E((X - 1)(X + 1)) = e$$

En déduire que X admet un moment d'ordre 2 et calculer sa variance.

Partie II

Un établissement bancaire comporte 5 guichets numérotés de 1 à 5. Le nombre N de personnes arrivant à la banque en une journée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les clients choisissent leur guichet au hasard, indépendamment les uns des autres. On note X le nombre de clients arrivant au guichet n°3 en une journée.

1. Donner $E(N)$ et interpréter la valeur λ .
2. Calculer $P_{(N=n)}(X = k)$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ puis pour $k > n$.
3. En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer $P(X = k)$.
4. Déduire la loi de X , son espérance et sa variance.

Exercice 2

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire - Obligatoire pour tous les groupes

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. (a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.
(b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P[X = n] = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes - Obligatoire pour les groupes 1 à 6

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U .
- (b) Déterminer, pour tout n de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.
- (c) En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$P[U = k] = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P[X = n] \quad \text{puis} \quad P[U = k] = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

- (d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V .
- (b) Déterminer, pour tout n de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.
- (c) En déduire la loi de V .

Partie III : Étude d'un jeu - Obligatoire pour les groupes 1 à 3

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0; 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

1. Simulation informatique

- (a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la variable aléatoire X .
- (b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0; 1[$, simule la variable aléatoire Y . Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```

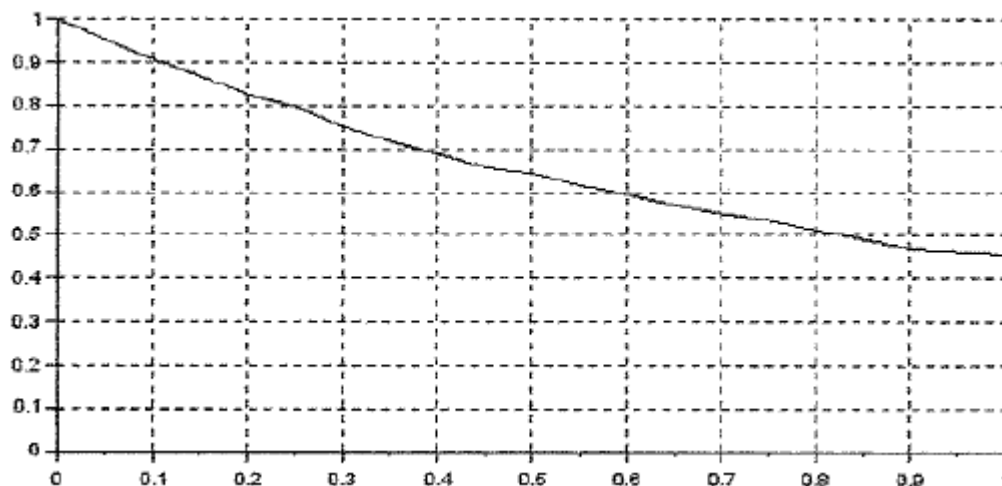
1. function r = mystere(p)
2. r = 0
3. N = 10^4
4. for k = 1:N
5. x = simule_X()
6. y = simule_Y(p)
7. if x <= y then
```

```

8. r = r + 1/N
9. end
10. end
11. endfunction

```

- (c) On trace, en fonction de p , une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

2. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B .

- Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.
 - Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.
 - Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P[Y \geq n] = (1 - p)^n$.
3. (a) Montrer : $P[X \leq Y] = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X = n]P[Y \leq n]$.
- (b) Déduire des résultats précédents : $P[X \leq Y] = \frac{4}{(2 + p)^2}$.
- (c) Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.