A rendre pour le 14 Avril 2021

Exercice 1 - Obligatoire pour les groupes 6 à 9

On considère l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} 3y+z \\ 2y \\ -z \end{pmatrix},\ y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel.
2. Déterminer 2 vecteurs u et v tel que $E = vect(u, v)$.
3. Montrer que les vecteurs u et v forment une famille libre.

Exercice 2 - Obligatoire pour les groupes 1 à 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
2. Écrire F sous la forme $vect(u, v)$ avec u et v deux vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (*Indication : Résoudre le système* $AX = 0$).

Exercice 3 - Obligatoire pour tous les groupes

On note $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer, pour tout entier k tel que $k \geq 3$:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \leq f(k-1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$

3. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n f(x)\, dx \leq S_n - \frac{1}{n \ln(n)}$$

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

(c) Établir : $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4. En utilisant le résultat de la question 2., montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
5. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n\ln(n)}$$

   (b) En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près et donner le script Scilab permettant d'obtenir cette valeur.

Exercice 4 - Obligatoire pour les groupes 1 à 4

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Majorer la fonction $g : x \to e^{-2x}$ sur $[0,1]$
6. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$
7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$
9. En déduire la limite de la suite $(n\,I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $(n\,(n\,I_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de a, b, c.