

A rendre pour le 24 Mars 2021

## Exercice 1 - Obligatoire groupe 6 à 10

On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie pour tout entier  $n$  strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

1. Calculer le premier terme  $u_1$  de la suite.
2. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de réels positifs.
3. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite décroissante.
4. Montrer que l'on a, pour tout entier  $n$  strictement positif :  $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n}$ .
5. En déduire une fonction Scilab qui prend un entier  $n$  strictement positif et qui renvoie  $u_n$ , le  $n$ -ième terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
6. Établir, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

7. À l'aide de l'inégalité précédente, déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$ .

## Exercice 2 - Obligatoire Groupe 5 à 10

On considère, pour tout entier naturel  $n$ , l'application  $\varphi_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$$

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
2. Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Déterminer le signe de  $I_n$  pour tout entier naturel  $n$ .
4. Qu'en déduit-on pour la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?
5. Majorer la fonction  $g : x \rightarrow e^{-2x}$  sur  $[0, 1]$ .
6. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

7. Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.
8. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

9. En déduire la limite de la suite  $(n I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite  $(n(n I_n - 1))_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de  $a, b, c$ .

### Exercice 3

Cet exercice étudie deux jeux de un dés avec des dés équilibrés à six faces.

#### I. Étude du premier jeu. - Obligatoire pour tous

Dans ce jeu on lance simultanément deux dés équilibrés, si les deux donnent le même résultat alors le joueur marque 1 point, sinon il ne marque pas de point.

1. Calculer la probabilité  $p$  de l'événement  $A$  : « Les deux dés donnent le même résultat ».
2. Le joueur répète  $n$  fois le même jeu et on note alors  $Y_n$  le nombre de points obtenus par le joueur après ces  $n$  parties.
  - (a) Reconnaître la loi de  $Y_n$  (*une justification soignée est attendue*).  
Donner explicitement  $P(Y_n = k)$  pour les valeurs  $k$  prises par  $Y_n$ .
  - (b) Donner la valeur de l'espérance  $E(Y_n)$  de la variable aléatoire  $Y_n$  et sa variance  $V(Y_n)$ .
3. Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il marque un point pour la première fois.  
On note alors  $Z$  la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur.
  - (a) Reconnaître la loi de  $Z$  (*une justification soignée est attendue*).  
Donner explicitement  $P(Z = k)$  pour les valeurs  $k$  prises par  $Z$ .
  - (b) Donner la valeur de l'espérance  $E(Z)$  de la variable aléatoire  $Z$  et sa variance  $V(Z)$ .

#### II. Étude d'un deuxième jeu. - Obligatoire groupes 1 à 7

Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés. (*On rappelle  $5^3 = 75$  et  $12^3 = 1728$ .*)

On note :

- $D_1$  le résultat du premier dé et  $D_2$  le résultat du deuxième dé
- $E_1$  l'événement :  $(D_1 < D_2)$ ,  $E_2$  l'événement :  $(D_1 = D_2)$  et  $E_3$  l'événement :  $(D_1 > D_2)$

Lors d'une partie,

- si l'événement  $E_1$  se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement  $E_2$  se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement  $E_3$  se produit alors le joueur marque 1 point.

Le joueur répète  $n$  fois ce jeu. Pour tout entier naturel  $i \geq 1$ , on note :

- $X_i$  la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la  $i^{\text{ème}}$  partie ;
  - $S_i$  le nombre de points marqués après  $i$  parties.
1. Calculer la probabilité de chacun des événements  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  (On démontrera notamment que  $P(E_1) = \frac{5}{12}$ ).
  2. Soit  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , déterminer la loi de la variable aléatoire  $X_i$  puis calculer son espérance et sa variance.
  3. Trouver la loi de la variable aléatoire  $S_1$ .
  4. Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire  $S_2$  et donner sa loi.
  5. (a) Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire  $S_3$ .  
(b) En utilisant un système complet d'évènement associé à  $S_2$ , calculer  $P(S_3 = 2)$ .
  6. (a) Ecrire  $S_n$  en fonction des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .  
En déduire l'espérance mathématique  $E(S_n)$  de  $S_n$ .  
(b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

## Exercice 4 - Obligatoire groupes 1 à 4

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Une urne contient une boule noire non numérotée et  $n - 1$  boules blanches, dont  $n - 2$  portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

Pour chaque  $i$  de  $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , on note  $B_i$  l'évènement : le  $i$ -ème tirage donne une boule blanche, on pose  $\overline{B}_i = N_i$  et on note  $X$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble  $X(\Omega)$  des valeurs que peut prendre la variable  $X$ .
2. (a) Pour tout  $i$  de  $\llbracket 2, n - 1 \rrbracket$ , justifier que  $P_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n - i}{n - i + 1}$ .  
(b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver  $P(X = k)$ , pour tout  $k$  de  $X(\Omega)$ .  
(c) Reconnaître la loi de  $X$  et donner son espérance et sa variance.
3. On note  $Y$  la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.  
(a) Pour tout  $k$  de  $X(\Omega)$ , montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$P\left([X = k] \cap [Y = 0]\right) = \frac{n - k}{n(n - 1)}$$

- (b) En déduire  $P(Y = 0)$ .
- (c) Reconnaître la loi de  $Y$  et donner son espérance et sa variance.
4. Simulation informatique.  
On rappelle / apprend qu'en **Scilab**, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $\llbracket a, b \rrbracket$ .  
(a) Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire  $X$ .  
On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB+1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
1. n=input('entrez une valeur pour n : ')
2. nB=n-1
3. X=1
4. u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
5. while u<nB+1
6.     nB=-----
7.     u=grand(1,1,'uin',1,-----)
8.     X=-----
9. end
10. disp(X,'la boule noire est apparue au tirage numéro')
```

- (b) Compléter les lignes 4 et 8 ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par  $X$ , la valeur prise par  $Y$ .

```
1. n=input('entrez une valeur pour n : ')
2. nB=n-1
3. X=1
4. Y=-----
5. u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
6. while u<nB+1
7.     nB=-----
8.     if u==1 then
9.         Y=-----
10.    end
11.    u=grand(1,1,'uin',1,-----)
12.    X=-----
13. end
14. disp(X,'la boule noire est apparue au tirage numéro')
15. disp(Y,'la valeur de Y est')
```