

A rendre pour le 10 Mars 2021

Exercice 1 - Série - Obligatoire pour les groupes 6 à 10

1. Calculer en justifiant soigneusement leur convergence les séries suivantes :

$$A = \sum_{n \geq 0} \frac{2^{2n}}{5^{n+1}}, \quad B = \sum_{n \geq 2} \frac{2^{n-1}}{n!}, \quad C = \sum_{n \geq 0} (n^2 - n)2^{-2n}.$$

2. Donner (en justifiant) la nature des séries :

$$D = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}, \quad E = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} - 1}, \quad F = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^5},$$

Exercice 2

Partie I : Étude de deux suites - Obligatoire pour tous les groupes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.
 - (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - (b) Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R}^{+*} et dresser son tableau de variations.
 - (c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = f(n)$.
 - (d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - (e) Écrire une fonction d'en-tête : **function y=u(n)** qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n .
2.
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
 - (b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leq x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
 - (c) Montrer que pour tout réel x positif,

$$x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$$

- (d) En déduire que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente. on note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.
 - (e) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge vers γ .
3. (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$
- (c) On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la question 1) e : a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps=input('Entrer un réel strictement positif : ')
n=floor(1/eps)+1
disp(u(n))
```

Partie II : Étude d'une série - Obligatoire groupes 1 à 5

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

- (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq \frac{1}{n^2}$

(b) En déduire que la série de terme général a_n converge.
- (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$.

(b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$.

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
- (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$
où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

(b) Calculer alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.
- (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.

(b) Retrouver alors le résultat de la question 3) b.

Exercice 3 - Issue de ESSEC - Groupe 1 à 4

Dans cette partie on considère un ensemble fini \mathcal{K} . $\mathcal{P}(\mathcal{K})$ désigne l'ensemble de toutes les parties de \mathcal{K} et pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$, on note \bar{A} le complémentaire de A dans \mathcal{K} .

Soient P et Q deux probabilités sur \mathcal{K} . Pour tout $k \in \mathcal{K}$, on pose $p_k = P(\{k\})$ et $q_k = Q(\{k\})$. On rappelle que pour tout $k \in \mathcal{K}$, $p_k \geq 0$, avec $\sum_{k \in \mathcal{K}} p_k = 1$. De plus toute probabilité P est entièrement déterminée par la donnée de $(p_k)_{k \in \mathcal{K}}$ puisque pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$, $P(A) = \sum_{k \in A} p_k$

On définit la distance en variation entre les probabilités P et Q par

$$D(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k| \quad ((i))$$

Partie 1 *Exemples de distance avec la loi uniforme.*

Dans cette première partie, on va calculer la distance en variation entre des probabilités connues.

- On lance des pièces de monnaie et on observe si on tombe sur pile (0) ou sur face (1). L'univers est donc $\mathcal{K} = \{0, 1\}$. On lance d'un côté une pièce non truquée qui suit une loi de probabilité uniforme noté P . D'un autre côté, on lance une pièce truquée qui a la loi de probabilité Q définie par $Q(\{0\}) = q_0 = \frac{1}{4}$ et $Q(\{1\}) = q_1 = \frac{3}{4}$. Rappelez ce que vaut p_0 et p_1 et calculez $D(P, Q)$.
- On lance maintenant des dés et on note la face sur laquelle on tombe. L'univers est $\mathcal{K} = \llbracket 1, 6 \rrbracket$. On lance d'un côté un dé non truqué muni de la loi uniforme P . D'un autre côté, on lance un dé truqué qui a la loi de probabilité Q définie par

$$Q(\{1\}) = q_1 = \frac{1}{12}, \quad q_2 = \frac{1}{6}, \quad q_3 = \frac{1}{4}, \quad q_4 = \frac{1}{12}, \quad q_5 = \frac{1}{6}, \quad q_6 = \frac{1}{4}.$$

Rappelez ce que vaut p_k (pour $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$) et calculez $D(P, Q)$.

- On considère $n = 2p$ un nombre pair. Dans les deux expériences suivantes, on tire des boules numérotées de 1 à n dans une urne et on regarde le numéro sur lequel on tombe. L'univers est donc $\mathcal{K} = \llbracket 1, n \rrbracket$. Dans la première urne, il y a 1 boule portant chaque numéro (il y a donc n boules en tout). On associe à cette expérience la loi de probabilité P .

(a) Donner la loi de probabilité de P .

Dans la seconde urne, il y a 1 boule portant le numéro 1, 2 boules portant le numéro 2, ..., n boules portant le numéro n . On associe à cette expérience la loi de probabilité Q .

(b) Combien y a-t-il de boules dans l'urne pour cette expérience ?

(c) En déduire $q_k = Q(\{k\})$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

(d) Montrez que $D(P, Q) = \frac{n}{4(n+1)}$. (Indication : Découpez la somme en $\sum_{k=1}^n = \sum_{k=1}^p + \sum_{k=p+1}^{2p}$.)

Partie 2 *Distance en variation.*

- Lorsque $\mathcal{K} = \{0, 1\}$ exprimer $D(P, Q)$ en fonction de p_1 et q_1 .
- Vérifier que pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$, $|P(A) - Q(A)| \in [0, 1]$.

3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$, $2|P(A) - Q(A)| = \left| \sum_{k \in A} (p_k - q_k) \right| + \left| \sum_{k \in \bar{A}} (p_k - q_k) \right|$

4. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$,

$$|P(A) - Q(A)| \leq D(P;Q) \quad ((ii))$$

5. Montrer que la partie $A = \{k \mid k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geq p_k\}$ réalise l'égalité dans (ii), c'est à dire que

$$|P(A) - Q(A)| = D(P;Q)$$

6. Démontrer la formule

$$D(P;Q) = 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}} (\min(p_k; q_k)).$$