A rendre pour le 10 Février 2021

Exercice 1 - Obligatoire pour tout les groupes

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a \text{ et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n(2-u_n),$$

où a est un réel tel que $0 < a < 1$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \to x(2-x)$.
2. (a) Montrer par récurrence que , pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) En déduire que la suite est convergente. Déterminer sa limite.
3. On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
   $$v_n = 1 - u_n$$
   (a) Exprimer pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) En déduire (par récurrence), que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = (1-a)^{2^n}$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (v_n). Retrouver la limite de la suite (u_n).
4. On considère le temps de vie d'une machine à café. En sortant de l'usine (au temps $t = 0$), la machine à café à une probabilité a d'être cassé ($0 < a < 1$). On notera A_n l'événement "la machine est cassé au temps $t = n$" et $p_n = p(A_n)$. Si la machine est cassé au temps $t = n$ elle reste cassé au temps $t = n+1$. Si la machine est en état de marche au temps $t = n$, elle a la probabilité p_n d'être cassé au temps $t = n+1$.
   (a) Calculez p_1.
   (b) Écrire p_{n+1} en fonction de p_n (en justifiant votre résultat).
   (c) En déduire p_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Que pensez vous de ce résultat ?

Exercice 2 - Obligatoire pour tous les groupes

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n^2)$.

1. Écrire un script Scilab permettant d'afficher le $n$ème terme de la suite u_n, n étant donné par l'utilisateur.
2. Établir pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs réelles, telle que $f(x) = \ln(1+x^2) - x$.
   (a) Dresser le tableau de variation de f puis déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

4. (a) Justifier pour tout réel $x \geq 0$, l'inégalité : $\ln(1+x) \leq x$.

   (b) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leq u_n^2$.

   (c) En déduire pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité $u_n \leq (\ln 2)^n$.

   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

   (e) Établir pour tout entier $n \geq 2$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1-(\ln 2)^n}{1-\ln 2}$.

Exercice 3 - Obligatoire pour les groupes 1 à 4

Soit $a \in]0,+\infty[$. Soit de plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0,+\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u_n existe bien et est strictement positif.
2. Soit l'application $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $f(x) \geq \sqrt{a}$.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \geq \sqrt{a}$.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone à partir du rang 1.

   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in [\sqrt{a},+\infty[$.

   (d) Déterminer ℓ.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{a}}{u_{n+1}+\sqrt{a}} = \left(\dfrac{u_n-\sqrt{a}}{u_n+\sqrt{a}}\right)^2$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{u_n-\sqrt{a}}{u_n+\sqrt{a}} = \left(\dfrac{u_0-\sqrt{a}}{u_0+\sqrt{a}}\right)^{2^n}$.