Durée : 4 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

CONCOURS D ADMISSION SIGMA n°2C 2020
Concepteur : M Leboucher

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Jeudi 9 Janvier 2020 - De 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Important : Vous devez faire un et un seul exercice du même thème, c'est-à-dire portant le même numéro (exemple Exercice 1A ou Exercice 1B). Si deux exercices sont fait, un des deux ne sera pas corrigés.

Indiquez bien à chaque fois sur votre copie le numéro de l'exercice traité.

Exercice 1 - Manipuler les racines carrées

Exercice 1A (cours)
Résoudre l'équation et l'inéquation suivante :

1. $\sqrt{x-4} = 2$
2. $\sqrt{x^2+1} \geq 1$

Exercice 1B (Application)

1. Résoudre l'inéquation : $\sqrt{x^2-1} \geq 3$
2. Résoudre l'inéquation : $\sqrt{x+5} \geq -2$
3. Simplifiez l'expression suivante en utilisant la quantité conjuguée :

$$A = \frac{x^2}{x - \sqrt{x^2+2}}$$

Exercice 2 - Résoudre une équation

Exercice 2A (cours)
Résoudre les équations suivantes.

1. $\dfrac{x+3}{3x-4} = 1$
2. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Exercice 2B (Application)
Résoudre les équations suivantes.

1. $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$
2. $x\ln(x+3) = x$

Exercice 3 - Utiliser les formules de $\ln$ ou de $\exp$

Exercice 3A (cours)
Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x+4) + \ln(x-4) = 0$
2. $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

Exercice 3B (Application)

1. Simplifier les expressions suivantes :

   (a) $A = e^{-3\ln(4)}$.
   (b) $B = \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e})$.
   (c) $C = \ln(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))})$.

2. Résoudre l'équation suivante : $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

Exercice 4 - Tracer des courbes

Exercice 4A (cours)
Tracer sur un même graphique les courbes d'équations

1. $y = -2$
2. $y = -2x + 3$
3. $y = e^x$

Exercice 4B (Application)
Tracer sur un même graphique les courbes d'équations

1. $y = 3x + 1$
2. $y = x^2 - 4x + 3$
3. $y = \frac{1}{x}$

Exercice 5 - Manipuler des valeurs absolues

Exercice 5A (cours)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $|x + 1| = 1$
2. $|x + 4| - |1 - 2x| = 2.$
3. $|x| > 3$

Exercice 5B (Application)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $|x| > 3$
2. $|4x - 2| < |x + 3|$
3. $|x^2 - 4| = |2x - 1|$

Exercice 6 - Montrer qu'une suite est minorée ou majorée

Exercice 6A (cours)
Soit u la suite telle que $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 3u_n$. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2 \times 3^n$.

Exercice 6B (Application)
On considère une suite (u_n) vérifiant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(4 + u_n)$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et est minorée par 1.
2. On considère que la suite (u_n) vérifie l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{4}|u_n - 2|$$

   Montrer par récurrence que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Exercice 7 - Déterminer la probabilité d'une union finie.

Exercice 7A (cours)
Dans une urne, il y a 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire successivement 3 boules avec remise dans cette urne on note les évènements A_i : " Tirer la boule n° 5 au $i^{\text{ème}}$ lancer". On définit enfin les évènements B_i : "On obtient au moins une boule n° 5 lors des i premiers lancers". Calculez $P(B_1)$, $P(B_2)$ et $P(B_3)$.

Exercice 7B (Application)
On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer n lancers d'un dé à 4 faces.

1. Calculer la probabilité de l'évènement C : "On obtient un 4 au premier et au dernier tirage"
2. On considère les évènements D : "Les tirages 1 et 2 amènent chacun un 4", E : "Les tirages 2 et 3 amènent chacun un 4" et F : "Les tirages 3 et 4 amènent chacun un nombre inférieur ou égal à 4". Calculer la probabilité qu'au moins un de ces évènements soient réalisés.

Exercice 8 - Déterminer la probabilité d'une intersection finie.

Exercice 8A (cours)
Dans une urne, il y a 3 boules vertes et 7 boules rouge. On tire 2 boules l'une après l'autre.

1. On remet la boule tirée dans l'urne. Calculez la probabilité que les 2 boules tirées soient vertes.
2. On ne remet pas la boule tirée dans l'urne. Calculez la probabilité que les 2 boules tirées soient vertes.

Exercice 8B (Application)
On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer 3 tirages dans une urne contenant 2 boules noires et 3 boules rouges. On suppose que les tirages se font sans remise. Quelle succession de couleurs a-t-on le plus de chance d'obtenir ; R-N-R ou N-R-N ?

Exercice 9 - Inverser une matrice en utilisant une formule.

Exercice 9A (cours)

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Exercice 9B (Application)

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - A$. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.
2. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 - 3B$. En déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 10 - Manipuler une inégalité mettant en jeu une somme.

Exercice 10A (cours)

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1 + x$
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^k \geq \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

Exercice 10B (Application)

1. Montrer que pour tout $x \geq 2$, $\dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Exercice 11 - Calculer des probabilités à l'aide du dénombrement.

Exercice 11A (cours)

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces équilibré.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un double (2 fois le même numéro) ?
2. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 6 ?
3. Quelle est la probabilité que le produit des numéros obtenus soit égale à 12 ?

Exercice 11B (Application)

On considère une urne contenant 4 boules numéro 1, 4 boules numéro 2, 4 boules numéro 3 et 4 boules numéro 4 (L'urne contient donc 16 boules au total).

1. On tire 3 fois avec remise dans cette urne :
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le numéro 3 ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le même numéro ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces numéro soit le 3 ?
2. On tire 3 fois sans remise dans cette urne :
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le numéro 3 ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le même numéro ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces numéro soit le 3 ?

Exercice 12 - Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète finie.

Exercice 12A (cours)

On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs 0,1,2 ou 3. On donne

$$P(X=0) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(X=1) = \frac{1}{2}.$$

1. Sachant que les événements $(X=2)$ et $(X=3)$ sont équiprobables, déterminer $P(X=2)$ et $P(X=3)$.
2. Donner la loi de X, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 12B (Application)

On tire successivement 2 dés à 6 faces. On note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.

1. Donner $X(\Omega)$ et la loi de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

On donne les résultats suivants : $18^2 = 324$, $29^2 = 841$ *et* $105 \times 18 = 1890$

Exercice 13 - Reconnaitre une loi uniforme, de Bernoulli, Binomiale.

Exercice 13A (cours)
On tire successivement et avec remise 6 cartes d'un paquet de 32 cartes. Dans les cas suivants, déterminer en le justifiant la loi de X, son espérance et sa variance.

1. On note X le nombre de valets obtenus.
2. On note X la variable aléatoire valant 1 si l'on a que des figures (rois, dames et valets) et 0 sinon.
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers.
4. On note X la variable aléatoire valant 1 si un coeur tombe, 2 si un carreau tombe, 3 si un trèfle tombe et 4 si un pique tombe.

Exercice 13B (Application)
Une grenouille se déplace sur un axe gradué. Elle commence sur la case 0. Elle peut
- Se déplacer de +2 cases avec probabilité 1/2.
- Rester sur la même case avec probabilité 1/6.
- Reculer d'une case (faire -1).

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la probabilité que la grenouille recule d'une case ?
2. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille et on note X_n le nombre de fois ou la grenouille a sauté de deux cases en avant. Quelle est la loi de X_n ? En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. On note Y_n le nombre de fois ou la grenouille est resté sur la même case. Quelle est la loi de Y_n ? En déduire l'espérance et la variance de Y_n.
4. On note Z_n la variable aléatoire égale à la position où est arrivée la grenouille. Exprimer Z_n en fonction de X_n et de Y_n. En déduire l'espérance de Z_n.

Exercice 14 - Résoudre un système linéaire.

Exercice 14A (cours)
Résoudre les systèmes suivants

1. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 4y & = & 1 \\ x & + & 3y & = & 3 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 0 \\ 6x & + & 3y & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 14B (Application)
Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 15 - Inverser une matrice.

Exercice 15A (cours)

1. Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes.
2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Exercice 15B (Application)

1. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
2. Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer C^{-1}.

Exercice 16 - Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle.

Exercice 16A (cours)

Déterminer sur quel intervalle les fonctions suivantes sont continues.

1. $f_1(x) = \ln(1 + e^x)$
2. $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$

Exercice 16B (Application)

Déterminer sur quel intervalle les fonctions suivantes sont continues.

1. $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$
2. $f_4(x) = \ln(4x^2 - 3x - 1)$
3. $f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(x^3) - 1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$