

---

**Durée** : 4 heures

Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

CONCOURS D ADMISSION SIGMA N°2B 2020  
Concepteur : M Leboucher

---

OPTION ÉCONOMIQUE  
MATHÉMATIQUES

Jeudi 9 Janvier 2020 - De 8h à 12h

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

*Il est conseillé de rédiger chaque exercice sur une copie différente.*

---

## Exercice 1 - Inspiré EDHEC 1995

$p$  désigne un réel élément de  $]0, 1[$ . On pose  $q = 1 - p$ .

Un mobile se déplace sur un axe d'origine  $O$  ; à chaque instant, il est soit en  $O$ , soit en  $A$  d'abscisse 1, soit en  $B$  d'abscisse  $-1$ .

Si à un instant donné, il est en  $O$ , alors, à l'instant suivant, il sera en  $A$  avec la probabilité  $p$  ou en  $B$  avec la probabilité  $q$ .

Si à un moment donné, il est en  $A$  ou en  $B$ , alors, à l'instant suivant, il sera à coup sûr en  $O$ .

On suppose qu'à l'instant 0, le mobile est en  $O$ .

Pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $i \in \{-1, 0, 1\}$ , on note  $E_{n,i}$  l'événement : « à l'instant  $n$ , le mobile est au point d'abscisse  $i$  ».

1. Calculer  $P(E_{n,i})$  pour tout  $n \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$  et pour tout  $i \in \{-1, 0, 1\}$ .
2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $\{-1, 0, 1\}$ , calculer

$$P_{E_{n,j}}(E_{n+1,i}).$$

- (b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(E_{n+1,-1}) &= qP(E_{n,0}), \\ P(E_{n+1,0}) &= P(E_{n,-1}) + P(E_{n,1}), \\ P(E_{n+1,1}) &= pP(E_{n,0}). \end{aligned}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $U_n = \begin{pmatrix} P(E_{n,-1}) \\ P(E_{n,0}) \\ P(E_{n,1}) \end{pmatrix}$ .

3. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Justifier que  $U_{n+1} = MU_n$  où  $M$  est une matrice carrée réelle d'ordre 3 que l'on précisera.
- (b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = M^n U_0$ .
- (c) En déduire un script Scilab demandant à l'utilisateur d'entrer  $n$ ,  $p$  et  $q$  et affichant la matrice  $U_n$ .

4. (a) Soit  $Q = \begin{pmatrix} q & 1 & q \\ -1 & 0 & 1 \\ p & -1 & p \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $Q$  est inversible et déterminer  $Q^{-1}$ .

$$\text{Soit } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Montrer que  $M = QDQ^{-1}$ .
- (c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = QD^nQ^{-1}$ .
5. (a) Donner, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la valeur de  $P(E_{n,-1})$ ,  $P(E_{n,0})$  et  $P(E_{n,1})$ .
- (b) Calculer  $P(E_{2n,0})$ . Aurait-on pu prévoir ce résultat ?

## Exercice 2

Soit  $a$  et  $b$  des réels avec  $0 < a < b$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites définies par  $u_0 = a$ ,  $v_0 = b$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $u_n$  et  $v_n$  existent bien et que  $u_n$  et  $v_n$  sont deux réels strictement positifs.
2. Écrire un script Scilab demandant à l'utilisateur les variables  $n$ ,  $a$  et  $b$  et affichant les valeurs de  $u_n$  et  $v_n$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , On pose  $x_n = \frac{u_n}{v_n}$  et  $y_n = u_n - v_n$ .

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $x_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^n}$ .

(b) Montrer que la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

4. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

5. Soit  $x \in ]0, 1[$ . On suppose ici que  $a = x$  et  $b = 1$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $P_n = \prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k})$ .

- (a) Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Calculer  $\frac{v_k}{v_{k+1}}$  en fonction de  $k$  et  $x$ .

- (b) En déduire une expression de  $P_n$  en fonction de  $v_{n+1}$ .

## Problème - Évolution des intentions de vote

Dans une élection à venir, deux candidats  $A$  et  $B$  se présentent. Un groupe d'électeurs est composé de  $m$  individus, avec  $m \geq 2$ .

Initialement, au jour appelé « jour 0 », le nombre d'individus préférant le candidat  $A$  vaut  $a$  (il y en a donc  $m - a$  préférant le candidat  $B$ ). Ensuite, chaque jour, un des individus au hasard dans le groupe en rencontre un autre, au hasard également, et il lui parle des élections. Si leurs intentions de vote diffèrent, il le convainc de voter comme lui.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat  $A$  le soir du  $n$ -ième jour. Ainsi,  $X_n$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 0, m \rrbracket$ .

On remarque que  $X_0$  est une variable aléatoire certaine :  $P(X_0 = a) = 1$ .

### Partie I - Un cas particulier : $m = 4$ - Inspiré ESSEC 2011

Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

1. Soit  $i$  et  $j$  deux entiers dans  $\llbracket 0, 4 \rrbracket$ . On note  $p_{i,j}$  la probabilité pour qu'il y ait exactement  $j$  personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour  $A$  un jour donné, sachant qu'il y en avait  $i$  la veille. C'est à dire

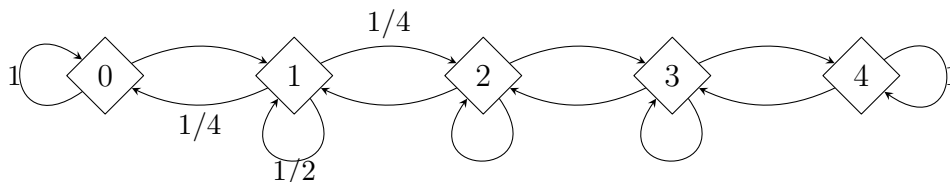
(a) Justifier :  $p_{0,0} = p_{4,4} = 1$ .

(b) Justifier : si  $i$  et  $j$  dans  $\llbracket 0, 4 \rrbracket$  sont tels que  $|i - j| \geq 2$ , alors  $p_{i,j} = 0$ .

(c) Établir :  $p_{1,0} = p_{1,2} = \frac{1}{4}$  et  $p_{1,1} = \frac{1}{2}$ .

- (d) De la même façon, donner pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, 4 \rrbracket^2$  la probabilité  $p_{i,j}$ .

On présentera les résultats sur le diagramme suivant, à reproduire et à compléter, et on justifiera quelques cas.



2. On définit la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$ , et pour tout entier naturel  $n$ , la matrice colonne  $U_n =$

$$\begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , établir la relation :  $U_{n+1} = MU_n$ .

En déduire pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité  $U_n = M^n U_0$ .

## Partie II - Le cas général

On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de  $m$  électeurs.

On note  $\pi_{n,k} = P(X_n = k)$ , la probabilité pour qu'il y ait exactement  $k$  électeurs envisageant de voter pour  $A$  à l'issue du  $n$ -ième jour.

1. Soit  $n$  un entier naturel.

(a) établir les trois relations :

$$\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \quad P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = \frac{k(m-k)}{m(m-1)};$$

$$\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) = \frac{k(m-k)}{m(m-1)};$$

$$\forall k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket, \quad P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = 1 - \frac{2k(m-k)}{m(m-1)}.$$

- (b) En déduire la relation, si  $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$  :

$$\pi_{n+1,k} = \frac{(k-1)(m+1-k)\pi_{n,k-1} + [m(m-1) - 2k(m-k)]\pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\pi_{n,k+1}}{m(m-1)}.$$

2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ ,

$$\pi_{n,k} \leq \left( \frac{m(m-1) - 2}{m(m-1)} \right)^n.$$

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $Z_n = X_{n+1} - X_n$ .

(a) Justifier :  $Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ .

(b) Exprimer  $P(Z_n = 1)$  en fonction des probabilités  $\pi_{n,k}$  avec  $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ .

(c) Comparer  $P(Z_n = -1)$  et  $P(Z_n = 1)$ .

(d) En déduire que  $E(Z_n) = 0$ .

(e) Montrer que la suite  $\left( E(X_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante et déterminer cette constante en fonction de  $a$ .