Durée : 4 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

CONCOURS D ADMISSION SIGMA n°2A 2020
Concepteur : M Leboucher

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 6 Janvier 2020 - De 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Il est conseillé de rédiger chaque exercice sur une copie différente.

Exercice 1 - Inspiré ECRICOME 2018

Partie I

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer $A^2 - 7A$.
   (b) Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.
   (c) Résoudre l'équation $X^2 - 7X + 12 = 0$.
   (d) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Déterminer les solutions des systèmes suivants :

$$E_3 : (A - 3I_3)X = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + y - 2z & = 0 \\ 0 & = 0 \\ x - y + 2z & = 0 \end{cases}$$

$$E_4 : (A - 4I_3)X = 0$$

2. On considère désormais les matrices : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) La matrice B est-elle inversible. Déterminer son inverse le cas échéant.
   (b) Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
   (c) Montrer que $D_2 = P^{-1}\ B\ P$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
   (d) Montrer que la matrice $D_1 = P^{-1}\ A\ P$ est également diagonale.

Partie II

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = \dfrac{1}{6}AX_{n+1} + \dfrac{1}{6}BX_n$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\quad Y_n = P^{-1}X_n$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad Y_{n+2} = \dfrac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \dfrac{1}{6}D_2Y_n$.
2. Pour tout entier naturel n, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_{n+2} & = \dfrac{1}{2}\ a_{n+1} + \dfrac{1}{2}\ a_n \\[2ex] b_{n+2} & = \dfrac{1}{2}\ b_{n+1} \\[2ex] c_{n+2} & = \dfrac{2}{3}\ c_{n+1} + \dfrac{1}{3}\ c_n \end{cases}$$

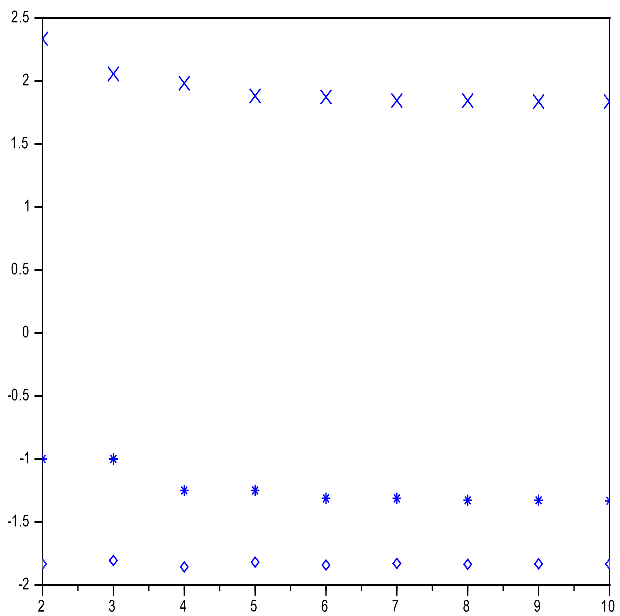
3. Calculer les matrices Y_0 et Y_1.
4. Pour tout entier naturel n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
5. En déduire l'expression de X_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$$

6. (a) Compléter le script ci-dessous qui demande d'entrer un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice X_n :

```
n = ................
Xold=[3;0;-1]
Xnew=[3;0;-2]
A= ................. // Ecrire la matrice A
B= ................. // Ecrire la matrice B
for i=2:n
    Aux= ................
    Xold=................
    Xnew=..............
end
res=..........
disp(res)
```

   (b) La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement (voir figure 1) les valeurs de α_n, β_n et γ_n en fonction de n.
   Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.



Exercice 2 - ECRICOME 2013 ECT

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

I- Étude du signe de g

1. Calculer $g'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer a, b, c tel que $x^3 - 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
3. En déduire que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution p que l'on précisera.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
5. Construire le tableau de variation de g.
6. Déterminer le signe de $g(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

II- Représentation graphique de f

1. Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
3. Déterminer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
4. Déterminer les limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
6. On note $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax$. Calculer a et b.
7. On note (D) la droite d'équation $y = ax + b$. Déterminer quand la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (D).
8. Tracer sur un même dessin la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite (D).

III- Étude d'une équation.

Soit $n \geq 1$ un entier naturel non nul, on considère l'équation

$$(E_n) : f(x) = 2n$$

1. Prouver que l'équation (E_n) admet une unique solution (que l'on ne cherchera pas à calculer). On note x_n cette solution.
2. Calculer puis classer par ordre croissant les réels $f(x_n)$, $f(1)$ et $f(n)$. En déduire l'encadrement :
$$\forall n \geq 1, \quad 1 \leq x_n \leq n.$$
3. Justifier que : $\forall n \geq 1,\ 1 - \dfrac{x_n}{n} = \dfrac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2}$.
4. Prouver que : $\forall n \geq 1,\ 0 \leq \dfrac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leq \dfrac{\ln(n)}{n}$.
5. En utilisant le théorème des gendarmes, déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

Exercice 3 - ECRICOME 2017

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $S_1 = 2,\ S_2 = 6,\ S_3 = 7,\ S_4 = 12,\ S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A - Études de cas particuliers

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
   (b) Calculer $P(T_n = 1)$.
   (c) Montrer que :
   $$P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$
3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $E(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie B - Étude de l'espérance dans le cas général

1. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.
   (b) En utilisation un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :
   $$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$
3. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:
   $$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$
   (c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :
   $$« \ \forall i \in [\![k, n]\!],\ P(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} \ ».$$
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

4. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.
   (b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$.
5. Démontrer que $E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$, puis que $E(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
6. Calculer $\lim_{n\to+\infty} E(T_n)$ (Indication : On pourra utiliser les formules que l'on connait sur les fonctions).

Partie C - Étude Scilab

1. On rappelle que la fonction $rand()$ en Scilab permet d'obtenir un nombre réel entre 0 et 1. Que permet la commande :

   ```
   X = ceil(n*rand())
   ```

   On considère désormais que l'expression précédente donne une modélisation de la variable aléatoire X_k.
2. Écrire un script Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer un nombre n et permet d'afficher une modélisation de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$
3. Modifier le Script Scilab précédent pour qu'il affiche également une modélisation de T_n.